This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

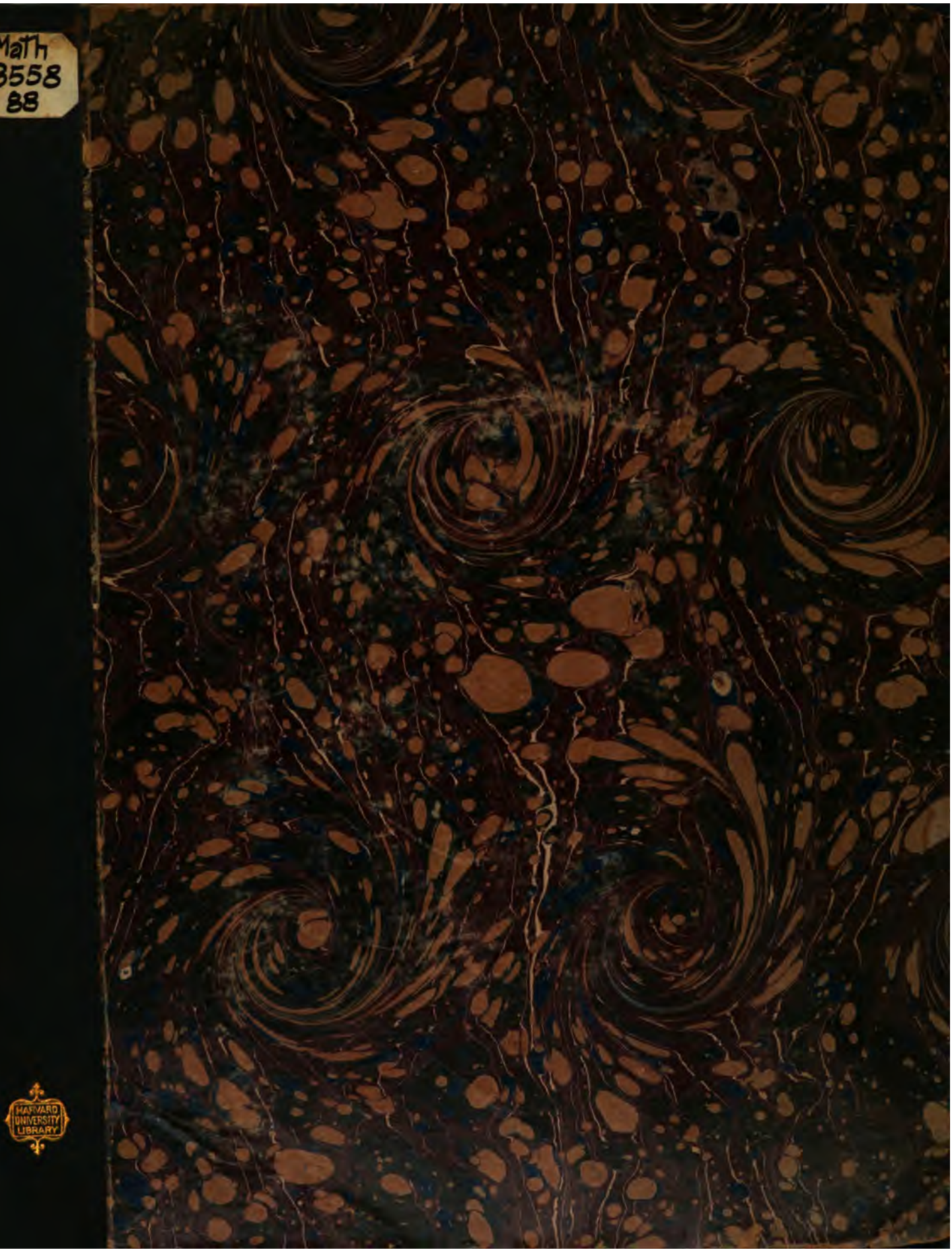
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math
8558
88



HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

Math 8558.88

SCIENCE CENTER LIBRARY

Parabolische Koordinaten

in der

Ebene und im Raum.

Mit zwei Figurentafeln.

Von

Dr. Karl Baer,

Oberlehrer.

Wissenschaftliche Beilage zu dem Programm des Realgymnasiums zu Frankfurt a. O.

Frankfurt a. O.
Königliche Hofbuchdruckerei Trowitzsch u. Sohn.
1888.

1888. Progr. Nr. 101.

~~VI. 7532~~
Math 8558.88

HARVARD COLLEGE
APR 7 1893
LIBRARY.

Paraboliſche Koordinaten in der Ebene und im Raum.

(Mit zwei Figurentafeln.)

Unter den krummlinigen Koordinaten im Bereich der Linien und Flächen zweiten Grades nehmen diejenigen, welche als elliptiſche bezeichnet zu werden pflegen, unſtreitig die hervorragendſte Stellung ein. Durch dieſelben wird ein Punkt in der Ebene beſtimmt als Schnittpunkt zweier konfokalen und orthogonalen Kegelſchnitte, von denen der eine eine Ellipſe, der andere eine Hyperbel iſt, ein Punkt im Raume dagegen als Schnittpunkt von drei orthogonalen und konfokalen Oberflächen zweiter Ordnung, nämlich eines Ellipſoides, eines Hyperboloides mit einem Fache und eines ſolchen mit zwei Fächern. Die elliptiſchen Koordinaten, zuerſt von Jacobi in einem an Steiner gerichteten Briefe[1]) gegeben, wurden am ausführlichſten von Lamé in einer Reihe von die Theorie der Wärme betreffenden Arbeiten, welche ſich vorzugsweiſe in den erſten (8) Bänden des Liouville'ſchen Journals finden, ſpäter in ſelbſtändigen Werken[2]) behandelt; ſie ſind dann, zumal ſeit ihre Wichtigkeit auch für andere Gebiete der Mathematik und Phyſik erkannt war, der Ausgangspunkt für einen neuen, vielfach kultivierten Zweig der mathematiſchen Wiſſenſchaften geworden.

Ihre große Brauchbarkeit verdanken die elliptiſchen Koordinaten nicht zum geringſten Teile den zahl- und lehrreichen Specialfällen, welche ſie bieten. Als ſolche ſind hauptſächlich zwei zu nennen: in dem einen Falle nimmt die Excentricität der Gebilde den Wert 0 an, in dem anderen ſtrebt dieſe Größe der Grenze ∞ zu. Im erſten Falle, wo die Ellipſe zum Kreiſe, das Ellipſoid zur Kugel wird, gehen die elliptiſchen Koordinaten der Ebene in Polarkoordinaten, die elliptiſchen Koordinaten des Raumes in elliptiſche Kugelkoordinaten oder auch in gewöhnliche Polarkoordinaten des Raumes über; im anderen Falle werden Ellipſen und Hyperbeln zu Parabeln, Ellipſoide und Hyperboloide zu Paraboloiden, und wir erhalten die Syſteme der paraboliſchen Koordinaten. Die zuerſt genannten Grenzfälle ſind allgemein bekannt, was ſich mit derſelben Strenge von den anderen, gewiß gleichberechtigten Fällen nicht gerade behaupten läßt. Lamé hat zwar ſowohl für ein Rotationsparaboloid als auch für einen paraboliſchen Cylinder den ſogenannten thermometriſchen Parameter

[1]) Crelle, Journal für Mathematik. Bd. 12. S. 137.

[2]) G. Lamé. 1) Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes. Paris, 1857.
2) Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris, 1859.
3) Leçons sur la théorie analytique de la chaleur. Paris, 1861.

bestimmt, bei welcher Gelegenheit[1]) er auf die Analogie und den Unterschied zwischen Parabel und Kreis, den beiden einfachsten und zugleich natürlichsten Kurven, hinweist, aber er geht nicht weiter auf die damit zusammenhängenden Koordinatensysteme ein. Andere Forscher, von denen Siebeck, Böklen, Caspary, Günther, Holzmüller und Danitsch[2]) namentlich zu bezeichnen sind, haben mit parabolischen Koordinaten in Verbindung stehende Fragen und Aufgaben erörtert, aber es fehlt zur Zeit, soviel mir bekannt, an einer Auf- und Zusammenstellung der verschiedenen Arten der genannten Koordinaten. Diese habe ich in der vorliegenden Abhandlung zu geben versucht.

I.
Die parabolischen Koordinaten in der Ebene.

§ 1.
Die konforme Abbildung.

Die Aufgabe, eine Ebene $\zeta = \xi + i\eta$ so auf eine andere Ebene $z = x + iy$ konform abzubilden, daß den Parallelen zu den Koordinatenachsen der Gegenstandsebene konfokale Parabeln in der Bildebene entsprechen, wird bekanntlich durch die Gleichung

$$1) \qquad x + iy = \frac{(\xi + i\eta)^2}{c}$$

gelöst, in welcher c eine beliebige, z. B. reelle und positive Konstante bedeutet. Sondern wir das Reelle vom Imaginären, so ergiebt sich

$$1a) \qquad x = \frac{\xi^2 - \eta^2}{c}, \qquad y = \frac{2\,\xi\eta}{c};$$

hieraus folgt weiter, wenn nur reelle Werte von ξ und η berücksichtigt werden,

$$1b) \quad \xi^2 = \frac{c}{2}\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right), \quad \eta^2 = \frac{c}{2}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)$$

und daher

$$2) \qquad y^2 = -4\,\frac{\xi^2}{c}\,x + 4\left(\frac{\xi^2}{c}\right)^2, \quad y^2 = 4\,\frac{\eta^2}{c}\,x + 4\left(\frac{\eta^2}{c}\right)^2.$$

---

[1]) G. Lamé, Leçons sur les fonctions inverses etc. S. 11.

[2]) Siebeck, Über graphische Darstellung imaginärer Funktionen. §§ 11 und 12. Crelle, Journal für Mathematik. Bd. 55.

O. Böklen, Über homofokale Paraboloide. Grunert, Archiv der Mathematik und Physik. Bd. 35, S. 81, oder Analytische Geometrie des Raumes. 2. Aufl. Stuttgart, 1884.

F. Caspary, Die Krümmungsmittelpunktsfläche des elliptischen Paraboloids. Berlin, 1875.

S. Günther, Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie. Leipzig, 1882.

G. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften. Leipzig, 1882.

D. Danitsch, Konforme Abbildung des elliptischen Paraboloids auf die Ebene. Belgrad, 1885.

Zugleich mag es erlaubt sein, auf zwei Arbeiten des Verfassers hinzuweisen, welche in den Programmen des Gymnasiums zu Cüstrin 1881 und 1883 erschienen sind. Dieselben führen die Überschriften: 1) Über das Gleichgewicht und die Bewegung der Wärme in einem homogenen Rotationsparaboloid. (Zugleich Inaugural-Dissertation. Halle a/S.) 2) Die Funktion des parabolischen Cylinders.

Dies sind die Gleichungen zweier Parabeln, die den Brennpunkt, der zugleich der Anfangspunkt des geradlinigen Koordinatensystems ist, gemeinsam haben und deren Achsen in die Abscissenachse fallen. Die Abschnitte, welche die Parabeln auf der x-Achse erzeugen, d. h. die Entfernungen der Scheitel vom Brennpunkte sind beziehungsweise

$$2a) \qquad x_\xi = \frac{p}{2} = \frac{\xi^2}{c}, \qquad x_\eta = -\frac{q}{2} = -\frac{\eta^2}{c}.$$

Wir bemerken, daß die Gleichungen 2) für konstante Werte von ξ und η je ein System konfokaler Parabeln darstellen, welche sich sämtlich der Theorie der konformen Abbildung gemäß unter rechten Winkeln schneiden. Die Scheitel aller Parabeln aus der Schar ξ liegen auf der positiven Hälfte der x-Achse in der Entfernung $\xi^2 : c$ vom Koordinatenanfang, die Scheitel derjenigen aus der Schar η auf der negativen Hälfte der x-Achse in der Entfernung $\eta^2 : c$. Diese Entfernungen werden offenbar um so größer und die Parabeln umschließen daher die beiden Hälften der Abscissenachse in um so weiteren Abständen, je größere Werte die Konstanten ξ und η annehmen. Für sämtliche Punkte der positiven x-Achse ist $\eta = 0$, für sämtliche Punkte der negativen x-Achse $\xi = 0$; die beiden im Koordinatenanfang beginnenden und nach entgegengesetzten Richtungen laufenden Strahlen der Abscissenachse sind also als Grenzfälle von Parabeln zu betrachten. Nehmen endlich ξ und η denselben Wert an, so sind die entstehenden Parabeln kongruent und ihre Schnittpunkte liegen in der Ordinatenachse.

Aus dem Gesagten erkennen wir, daß sich jeder Punkt der Ebene (x,y) vollständig und auch eindeutig als Schnittpunkt einer Parabel aus dem System ξ mit einer Parabel aus dem System η bestimmen läßt, wofern die Werte von ξ an die Bedingung $0 \leqq \xi \leqq \infty$, die Werte von η an die Bedingung $-\infty \leqq \eta \leqq \infty$ geknüpft sind und festgesetzt wird, daß einem positiven Werte von η nur die in der Halbebene $(x, +y)$ gelegene, einem negativen Werte von η nur die in der Halbebene $(x, -y)$ gelegene Halbparabel entsprechen soll. Wollte man auch negative Werte von ξ zulassen, so würde die Bestimmung der Punkte in der Ebene (x, y), die wir uns alsdann zweckmäßig aus zwei über einander liegenden Blättern bestehend zu denken hätten, in genau derselben Weise erfolgen können. Positiven Werten von ξ würden demnach die Punkte des oberen Blattes, negativen diejenigen des unteren Blattes zuzuordnen sein. Diese in der Natur der Abbildung liegende Zweideutigkeit vermeiden wir ganz, wenn wir, wie bemerkt, der Größe ξ nur solche Werte zuerteilen, die zwischen 0 und ∞ liegen. Da sich somit die Lage eines Punktes P der Ebene ebenso wohl durch seine Cartesischen Koordinaten x und y als auch durch die Größen ξ und η bestimmen läßt, so können wir die letzteren als die „parabolischen Koordinaten" von P bezeichnen. Während indes die x- und y-Achse bei den Cartesischen Koordinaten sich unter 90^0 schneiden, bilden die Achsen des parabolischen Koordinatensystems, d. h. die beiden Grenzparabeln, für welche $\xi = 0$ und $\eta = 0$ ist, einen Winkel von 180^0.

Wählen wir zur augenblicklichen Vereinfachung die Konstante c als Maßeinheit, so erhalten wir für einen Punkt P_1 (Fig. 1) mit den parabolischen Koordinaten $\xi = 5$; $\eta = 3$ als Entfernungen der Scheitel der Parabeln vom Brennpunkte $x_\xi = 25$ $x_\eta = -9$. Werden nun die beiden Parabeln gezeichnet, so schneiden sich dieselben in einem Punkte (P_1), dessen Cartesische Koordinaten $x = 16$; $y = 30$ sind. Der symmetrisch zur x-Achse gelegene Punkt P_2 ($x = 16$; $y = -30$) hat die parabolischen Koordinaten $\xi = 5$; $\eta = -3$, während dem Punkte P_3

($x = -16$; $y = -30$) die Werte $\xi = 3$; $\eta = -5$, dem Punkte P_4 ($x = -16$; $y = 30$) die Werte $\xi = 3$; $\eta = 5$ zukommen. Andere in der Figur bezeichnete Punkte sind die Punkte P_5, P_6, P_7, P_8 der Ordinatenachse, für welche beziehungsweise

bei P_5 ($x = 0$; $y = 50$) $\xi = 5$; $\eta = 5$,
bei P_6 ($x = 0$; $y = 18$) $\xi = 3$; $\eta = 3$,
bei P_7 ($x = 0$; $y = -18$) $\xi = 3$; $\eta = -3$,
bei P_8 ($x = 0$; $y = -50$) $\xi = 5$; $\eta = -5$

ist. Bei den Punkten der Abscissenachse ferner hat man zu unterscheiden, ob sie auf dem positiven oder auf dem negativen Ufer derselben d. h. auf der Seite der Halbparabeln mit positivem oder negativem η liegen. Man erhält als Koordinaten

für P_9 ($x = 25$; $y = 0$) $\xi = 5$; $\eta = \pm 0$,
für P_{10} ($x = 9$; $y = 0$) $\xi = 3$; $\eta = \pm 0$,
für P_{11} ($x = -9$; $y = 0$) $\xi = 0$; $\eta = \pm 3$,
für P_{12} ($x = -25$; $y = 0$) $\xi = 0$; $\eta = \pm 5$.

In allen diesen Beispielen, wie man sieht, sind die Punkte Schnitte orthogonaler Parabeln. Diese Vorstellung dürfen wir auch nicht fallen lassen bei dem Punkte O, dem Koordinatenanfang, für welchen $x = 0$; $y = 0$; $\xi = 0$; $\eta = \pm 0$ ist; auch dieser Punkt muß als Schnittpunkt zweier sich senkrecht durchschneidenden Parabeln angesehen werden, obwohl dieselben geradezu in Strahlen von entgegengesetzter Richtung übergegangen sind.

Hinsichtlich der Anordnung der Vorzeichen der geradlinigen und der paraboliſchen Koordinaten endlich bemerken wir, daß, während x und y im ersten Quadranten der z-Ebene positive Werte haben, ξ und η im ersten und zweiten Quadranten d. h. in der ersten Halbebene der ζ Ebene diese Eigenschaft besitzen. Treten wir jetzt durch den von der negativen Hälfte der x-Achse gebildeten Verzweigungsschnitt aus dem oberen Blatt in das untere, d. h. aus der ersten Halbebene in die zweite Halbebene über, so wird ξ negativ, η dagegen bleibt positiv; in der dritten Halbebene, welche sich an die zweite im unteren Blatte auf gewöhnliche Weise anschließt, ist sowohl ξ als η negativ. Wir treten nun aus dem unteren Blatt durch den Verzweigungsschnitt hindurch wieder in das obere Blatt zurück und müssen in der vierten Halbebene ξ mit positivem, η mit negativem Vorzeichen versehen. Bei dieser Anordnung, die sich auch sonst rechtfertigt, stimmen die Vorzeichen von ξ und η in den vier Halbebenen der ζ-Ebene mit den Vorzeichen von x und y in den vier Quadranten der z-Ebene genau überein. Das obere Blatt der ζ-Ebene besteht demnach aus der ersten und vierten Halbebene dieser Doppelebene und entspricht in jeder Weise der aus dem ersten und vierten Quadranten bestehenden Halbebene der z-Ebene.

§ 2.

Zusammenhang mit den elliptischen Koordinaten.

Daß die paraboliſchen Koordinaten einen speciellen Fall der allgemeineren elliptischen Koordinaten bilden, ist selbstverständlich, da die Parabel als eine Ellipse oder Hyperbel angesehen werden kann, deren Excentricität unendlich groß ist, während der Abstand des Scheitels vom benachbarten Brennpunkte einen endlichen gegebenen Wert behält. Setzen wir

$$x_1 + iy_1 = c_1 . \cos\ \xi_1 + i\eta_1),$$

so handelt es sich um die konforme Abbildung der ζ_1-Ebene auf die z_1-Ebene, so daß konstanten Werten von η_1 ein System konfokaler Ellipsen, konstanten Werten von ξ_1 ein System konfokaler Hyperbeln entspricht. Beide Scharen haben die Brennpunkte, deren Abstand $2c_1$ beträgt, gemeinsam und sind orthogonal. Bringen wir hyperbolische Funktionen zur Anwendung, so ist die Gleichung der Ellipsen

$$\frac{x_1^2}{c_1^2 \cdot \operatorname{Cof}^2 \eta_1} + \frac{y_1^2}{c_1^2 \cdot \operatorname{Sin}^2 \eta_1} = 1$$

und diejenige der Hyperbeln

$$\frac{x_1^2}{c_1^2 \cdot \cos^2 \xi_1} - \frac{y_1^2}{c_1^2 \cdot \sin^2 \xi_1} = 1.$$

Verlegen wir den Anfangspunkt der Koordinaten nach einem Brennpunkte, indem wir $x_1 + c_1 = x$, $y_1 = y$ setzen, so ergeben sich die neuen Gleichungen

$$y^2 = \operatorname{Tg}^2 \eta_1 \left(c_1^2 \operatorname{Sin}^2 \eta_1 + 2c_1 x - x^2 \right), \quad y^2 = \operatorname{tg}^2 \xi_1 \left(c_1^2 \sin^2 \xi_1 - 2cx + x^2 \right);$$

die Abstände der Scheitel vom benachbarten Brennpunkte sind ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\frac{q}{2} = 2c_1 \cdot \operatorname{Sin}^2 \frac{\eta_1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{p}{2} = 2c_1 \cdot \sin^2 \frac{\xi_1}{2}.$$

Wenn nun die Excentricität c_1 einen ins Unendliche wachsenden Wert annehmen soll, während $\frac{q}{2}$ und $\frac{p}{2}$ endlich bleiben, so müssen η_1 und ξ_1 sich immer mehr und mehr der Null nähern. Wir erhalten daher schließlich entsprechend den Gleichungen 2) als Grenze der Ellipsen und Hyperbeln die Parabeln

$$y^2 = 2qx + q^2 \quad \text{und} \quad y^2 = -2px + p^2.$$

Auch die Abbildungsfunktion kann durch einen einfachen Übergang zur Grenze gewonnen werden. Entwickelt man nämlich in

$$x_1 + iy_1 = -c_1 \cdot \cos x (\xi + i\eta)$$

den Kosinus nach Potenzen von $(\xi + i\eta)$, so folgt zunächst

$$x_1 + iy_1 = -c_1 \left\{ 1 - \frac{x^2 (\xi + i\eta)^2}{2!} + \frac{x^4 (\xi + i\eta)^4}{4!} - \ldots \ldots \right\},$$

oder, falls wiederum $x_1 + c_1 = x$, $y_1 = y$ gesetzt wird,

$$x + iy = \frac{c_1 x^2}{2!} (\xi + i\eta)^2 - \frac{c_1 x^4}{4!} (\xi + i\eta)^4 + \ldots \ldots;$$

ist nun $c_1 = \frac{2}{c x^2}$ und nähert sich x allmählich der Null, so erhält man

$$x + iy = \frac{(\xi + i\eta)^2}{c},$$

also die Gleichung 1). Ebenso kann unsere Abbildung auch als Grenzfall der durch die Gleichung

$$x + iy = c \cdot \left\{ \frac{1 - e^{x (\xi + i\eta)}}{1 + e^{x (\xi + i\eta)}} \right\}^2$$

angedeuteten Abbildung angesehen werden, deren ausführliche Behandlung vorbehalten bleibt.

§ 3.

Zusammenhang mit den Polarkoordinaten.

Um den Zusammenhang der paraboliſchen Koordinaten mit den Polarkoordinaten zu unterſuchen, ſetzen wir in Gleichung 1)

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und erhalten

$$\xi + i\eta = \sqrt{cr}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Mithin iſt

$$3)\qquad \xi = \sqrt{cr}\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad \eta = \sqrt{cr}\sin\frac{\varphi}{2},$$

alſo

$$3a)\quad \xi^2 + \eta^2 = cr, \quad \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \quad \text{d. h.} \quad \sin\varphi = \frac{2\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}, \quad \cos\varphi = \frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}.$$

Während die Gleichungen 3) für konſtante Werte von ξ oder η die auf den Brennpunkt als Koordinatenanfang bezogenen Polargleichungen der beiden Parabelſcharen vorſtellen, erſehen wir aus 3a) zunächſt, daß bei konſtantem r auch $\xi^2 + \eta^2$ konſtant iſt. Für eine Schar von koncentriſchen Kreiſen, die den Nullpunkt zum Mittelpunkt und eine gegebene Strecke r als Radius hat, iſt demnach die Summe $\xi^2 + \eta^2$ eine konſtante Größe, mit anderen Worten, die Gleichung eines Kreiſes jener Schar in paraboliſchen Koordinaten lautet

$$3b)\qquad \xi^2 + \eta^2 = cr.$$

Bewegt man alſo eine Strecke r ſo in der Abſciſſenachſe, daß der Nullpunkt ſtets innerhalb der Strecke liegt oder höchſtens in einen der Endpunkte fällt, ſo geben die Endpunkte der Strecke in ihren verſchiedenen Lagen die Scheitel ſämtlicher Parabeln an, deren Schnittpunkte die Peripherie eines Kreiſes bilden. Dabei iſt ſelbſtverſtändlich, daß alle Parabeln den Nullpunkt zum Brennpunkt haben. Dieſer Punkt iſt der Mittelpunkt des Kreiſes und ſein Radius die gegebene Strecke; die Größe von c bleibt willkürlich.

Ferner iſt erſichtlich, daß für ſämtliche Strahlen des durch den Nullpunkt gehenden Strahlenbüſchels d. h. bei gegebenem φ der Quotient $\eta : \xi$ einen konſtanten Wert hat. Dies bedeutet, daß die Gleichung einer vom Koordinatenanfang ausgehenden Geraden, welche mit der poſitiven Richtung der Abſciſſenachſe den Winkel φ bildet, in paraboliſchen Koordinaten ausgedrückt

$$3c)\qquad \eta = \xi \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

iſt. Die Form der Gleichungen eines um den Nullpunkt geſchlagenen Kreiſes und einer durch dieſen Punkt gehenden Geraden iſt alſo bei Anwendung paraboliſcher Koordinaten weſentlich dieſelbe wie bei den Koordinaten des Carteſius. Man könnte ſogar behaupten, daß durch die neuen Koordinaten noch eine Vereinfachung gewonnen ſei, inſofern als an Stelle des Quadrates des Radius dieſer ſelbſt und an Stelle der ganzen Anomalie deren Hälfte in die Formel eingetreten ſind. Die Gleichung 3c) beſtätigt übrigens, falls φ von 0° bis 720° variiert, die Richtigkeit der am Schluſſe des § 1 getroffenen Anordnungen über die Vorzeichen von ξ und η. Will man vom unteren

Blatte der ζ-Ebene ganz absehen, so ist es zweckmäßig, die Größe des Winkels φ zwischen -180^0 und $+180^0$ zu wählen.

Zu der Schar von Kreisen, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfang ist, stehen übrigens unsere Parabelscharen noch in einer anderen Beziehung, die wir nicht unerwähnt lassen wollen. Es ist bekannt, daß die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine Gerade und einen Kreis berühren, auf zwei Parabeln[1]) liegen, die das Centrum zum Brennpunkt und das vom Centrum auf die Gerade gefällte Lot zur Achse haben. Wählen wir die y-Achse als die gegebene Gerade, so werden die Parabeln kongruent; sie liegen symmetrisch zur Ordinatenachse und erfüllen die Gleichungen

$$y^2 = r^2 \pm 2rx,$$

in denen r den Radius des gegebenen Kreises bezeichnet. Das doppelte Vorzeichen ist dadurch bedingt, daß der gesuchte Kreis den gegebenen von innen oder außen und die gegebene Gerade auf der einen oder andern Seite berühren kann. Die Parabeln haben ihre Scheitel in den Mittelpunkten der beiden Radien, welche in der x-Achse liegen, und schneiden sich in den Endpunkten des gegebenen Kreisdurchmessers offenbar unter rechten Winkeln. Obige Gleichungen stimmen, wie man bemerkt, mit den Gleichungeu 2) genau überein, sobald der Radius r verschiedene Werte annimmt, die Aufgabe also für alle koncentrischen Kreise gelöst wird. Die Doppelschar der Ortslinien ist alsdann mit den beiden hier behandelten Parabelsystemen identisch.

§ 4.

Geometrische und physikalische Bedeutung der Parameter.

Wir versuchen jetzt für die Konstanten c, ξ, η der Gleichungen 2) eine — zunächst geometrische — Bedeutung zu ermitteln. Da

$$p = \frac{2\xi^2}{c}, \qquad q = \frac{2\eta^2}{c}$$

gesetzt war, so sind die Parameter 2p und 2q der Parabeln die dritten geometrischen Proportionalen zu c und 2ξ bez. 2η, falls man sich c, ξ und η als Strecken oder deren Maßzahlen gegeben denkt. Damit ist indes nicht viel gewonnen. Gehen wir jedoch auf die Eigenschaften der Parabel als Kegelschnitt zurück, so lassen sich jene Größen in einfacher Weise geometrisch deuten.

Die Parabel entsteht, wenn eine Ebene parallel mit einer Seitenlinie eines geraden oder schiefen Kreiskegels durch einen beliebigen, als Scheitel zu wählenden Punkt der Mantelfläche gelegt wird. Ist (Fig. 2) ABC ein Achsenschnitt eines solchen z. B. geraden Kegels, S der angenommene Punkt und AB die Seitenlinie, so ist SQ die Achse der Parabel, falls SQ parallel AB ist. Ihr Brennpunkt O ist der Berührungspunkt der Ebene SQP mit einer den Kegelmantel berührenden Kugel, deren Centrum D durch Halbieren der Winkel bei A und S gefunden wird. Dann wird[2])

$$\overline{PQ}^2 = 4\,\frac{\overline{DS}^2}{\overline{AS}}\cdot SQ = 4\,\frac{\overline{DS}^2}{\overline{AS}}\,(SO + OQ).$$

Setzt man $DS = \eta$, $AS = c$ und wählt OQ als Achse der positiven Abscissen (x), die in O in

[1]) M. vergl. z. B. G. Emsmann, Mathematische Excursionen. Halle a/S., 1872, S. 166 und 169, oder dessen Abhandlung im Programm des hiesigen Realgymnasiums vom Jahre 1875 mit dem Titel: Die Kegelschnitte als geometrische Örter für die Mittelpunkte von Kreisen, welche zwei gegebene Kreise berühren. S. 27.

[2]) Vergl. E. Gruhl, Analytische Geometrie der Ebene. Berlin, 1878. S. 189.

der Ebene S Q P auf O S senkrechte Richtung als Ordinatenachse (y), so ergiebt sich, da die Dreiecke A S D und D S O ähnlich sind und mithin O S : D S = D S : A S ist,

$$y^2 = 4\frac{\gamma_1^2}{c}x + 4\left(\frac{\gamma_1^2}{c}\right)^2$$

d. h. die zweite der Gleichungen 2). Wiederholt man dieselbe Konstruktion an der über die Spitze A hinaus erweiterten Kegelfläche, so wird in derselben Weise die erste der Gleichungen 2) erhalten. Demnach wird der Abstand des Parabelscheitels von der Spitze des Kegels durch c, von der Achse des Kegels dagegen durch η (bez. ξ) repräsentiert. Dies ist die geometrische Bedeutung jener Konstanten. — Übrigens ist auch, wenn α die Öffnung des Kegels d. h. den Winkel B A C bezeichnet, $\gamma_1 = c \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$; für die Entfernung O S des Scheitels vom Brennpunkt erhält man demnach

$$\frac{q}{2} = \gamma_1 \sin\frac{\alpha}{2} = c\,\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Um von der ganzen z-Ebene mit allen in ihr liegenden Parabeln am Kegel eine Vorstellung zu gewinnen, legen wir durch A B die zu S Q P parallele Ebene und projicieren auf dieselbe alle auf dem Kegelmantel liegenden η- und ξ-Parabeln durch Gerade, welche dem Strahle A O parallel laufen. Dann fallen alle Brennpunkte O in die Spitze A des Kegels und ebenso decken sich alle Achsen der Parabeln mit A B oder ihrer Verlängerung über A hinaus.

Von anderen rein mathematischen Aufgaben, in denen der Parameter einer Parabel sich als dritte geometrische Proportionale zu zwei gegebenen Strecken darstellt, sehen wir hier ab. Dagegen möge es gestattet sein, an das entsprechende Vorkommen jener Größe in der Mechanik zu erinnern. Wird ein materieller Punkt von einer Beschleunigung beeinflußt, deren Richtung fortwährend nach einem festen Centrum hinläuft und deren Größe dem umgekehrten Quadrate der Entfernung des Punktes vom Centrum proportional ist, so ist die Bahn desselben nach den allgemeinen Gesetzen der Centralbewegung ein Kegelschnitt, dessen Natur einzig und allein durch die Größe der Anfangsgeschwindigkeit (v_0) und des anfänglichen Abstandes (r_0) vom Centrum, nicht aber durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bedingt ist. Dieser Kegelschnitt wird, falls

$$v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} = 0$$

ist, eine Parabel, welcher die Gleichung[1]) zukommt

$$y^2 = -2\frac{c_1^2}{\mu}x + \frac{c_1^4}{\mu^2}.$$

Hierbei hat c_1 den Wert $v_0\, r_0 \sin\alpha_0$, wenn α_0 den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit dem Radiusvektor der Anfangslage des Punktes bildet, während μ die Intensität der Anziehungskraft in der Einheit der Entfernung mißt. Ein Vergleich mit der ersten Gleichung in 2) zeigt, daß ξ mit c_1, c mit 2μ zu identificieren ist, um völlige Übereinstimmung zu erzielen. Die physikalische Bedeutung von ξ (bez. η) und c ergiebt sich hiernach von selbst. Specielle Beispiele bieten die Bewegung von Kometen und Sternschnuppen, die parabolische Bahnen

[1]) Vergl. Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik, herausgegeben von O. Schlömilch. Leipzig, 1853. Bd. 2. S. 41.

haben, und die verschiedenen Fälle der Wurfbewegung unter dem Einfluß der Anziehungskraft der Erde.

§ 5.

Graphische Darstellung der Lösungen der Pythagoreischen Gleichung.

In fast elementarer Weise lassen sich die paraboloischen Koordinaten verwenden, wenn es sich um die graphische Darstellung[1]) der Lösungen der Pythagoreischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

handelt. Hier werden Zahlen x und y gesucht, für welche die Summe der Quadrate gleich einer Quadratzahl r^2 ist. Als zusammengehörige Werte von x, y und r finden wir die Ausdrücke

$$x = \frac{\xi^2 - \eta^2}{c}, \qquad y = \frac{2\,\xi\,\eta}{c}, \qquad r = \frac{\xi^2 + \eta^2}{c},$$

in welchen, falls nur Lösungen in ganzen positiven Zahlen verlangt werden, für c z. B. die Einheit für ξ und η dagegen ebenfalls und zwar alle möglichen positiven ganzen Zahlen zu setzen sind. Würden aber nur die wirklich verschiedenen Lösungen verlangt, so wären alle diejenigen Lösungen auszuschließen, die sich als Vielfache einer bereits gefundenen Lösung darstellen; ξ und η dürfen daher in diesem Falle keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, aber auch nicht beide zugleich ungerade Zahlen sein.

Sehen wir zunächst von den genannten Einschränkungen ab und betrachten x und y als die geradlinigen rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes P, so stellen offenbar ξ und η für denselben Punkt die paraboloischen Koordinaten vor. Es sind nämlich, wie man bemerkt, x und y die Wurzeln der Gleichungen 2), so daß die Punkte P als Schnittpunkte der durch diese Gleichungen gegebenen orthogonalen Parabelscharen angesehen werden können. Die Figur 3) zeigt die entsprechende Konstruktion für den ersten Quadranten, auf welchen es allein ankommt, da negative Werte von x oder y nichts Neues liefern. Sie ist dadurch entstanden, daß $c = 1$ und für ξ und η die Werte der natürlichen Zahlenreihe von 0 bis 15 gesetzt wurden, und verschafft demnach alle Lösungen Pythagoreischer Dreiecke, für welche keine der beiden Katheten den Wert 200 übersteigt. Bei der Zeichnung läßt sich die symmetrische Lage der Parabeln zu den Koordinatenachsen, ebenso wie die Kongruenz je zweier derselben mit Vorteil ausnutzen. Die Cartesischen Koordinaten der Schnittpunkte, die einfach abzulesen sind, sind die Katheten, die Radienvektoren die Hypotenusen Pythagoreischer Dreiecke. Beispielsweise schneiden sich die Parabeln $\xi = 5$ und $\eta = 2$ in einem Punkte P, für welchen $OQ = x = 21$, $PQ = y = 20$, $OP = r = 29$ ist; in der That ist $21^2 + 20^2 = 29^2$.

Wir bezeichnen als wesentliche Lösungen alle diejenigen Wertepaare von x und y, welche hinreichen, um alle Lösungen zu finden. Handelt es sich nur um solche, so sind in der Figur, welche alle Werte liefert, die sich direkt als Schnittpunkte zweier Parabeln unseres Koordinatensystems darstellen, zunächst alle Wertepaare fortzulassen, die aus einem bereits gefundenen durch bloße Erweiterung entstehen. Es ergeben sich z. B. aus $x = 3$, $y = 4$ auch die Lösungen $x = 12$, $y = 16$; $x = 27$, $y = 36$; $x = 48$, $y = 64$ u. s. w. Alle diese sind in der Figur durch einen nach

[1]) M. vergl. meine Mitteilung in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann, 1888, Jahrgang 19: Graphische Darstellung der Lösungen der Pythagoreischen Gleichung.

dem Nullpunkte gerichteten Strich bezeichnet und werden, da sie auf geraden Linien, den Radienvektoren, liegen, am einfachsten dadurch ausgeschieden, daß man einen Fahrstrahl um den Nullpunkt dreht und von allen in einer und derselben Richtung liegenden Werten nur denjenigen stehen läßt, der dem Koordinatenanfang am nächsten liegt, ein Verfahren, welches lebhaft an das Sieb des Eratosthenes erinnert. Derartige Wertepaare, die in der Figur durch einen kleinen Kreis gekennzeichnet sind, gehen aus den noch übrigen wesentlichen Lösungen dadurch hervor, daß die Werte von x und y mit einander vertauscht und die neuen Lösungen mit dem Faktor 2 erweitert werden. So sind z. B., da die Werte $x = 9$, $y = 40$ die Aufgabe lösen, auch $x = 40$, $y = 9$ und ebenso $x = 80$, $y = 18$ Lösungen; diese sind also nicht wesentliche. Demnach ergeben sich im Zahlengebiet von 1 bis 200 im ganzen 35 wesentliche Lösungen. Sie sind in folgender Tabelle[1]) enthalten:

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
3	4	5	12	7	24	9	40	11	60	13	84	15	112	17	144	19	180
15	8	21	20	55	48	33	56	39	80	85	132	51	140	57	176		
35	12	45	28	91	60	65	72	119	120	133	156	95	168				
63	16	77	36	187	84	105	88	171	140								
99	20	117	44			153	104										
143	24	165	52														
195	28																

Sollen umgekehrt aus diesen wesentlichen Lösungen alle übrigen Lösungen gefunden werden, so hat man zuerst zur Vertauschung von x und y in Fig. 3 für jede wesentliche Lösung das Spiegelbild gegen die durch den Anfangspunkt gehende Diagonale des Quadrates zu suchen, alle bisher gefundenen Punkte, d. h. sowohl die wesentlichen Lösungen als auch ihre Spiegelbilder mit dem Koordinatenanfang zu verbinden und die Entfernung wiederholt auf dem Fahrstrahl abzuschneiden. Dabei ergeben sich freilich auch Lösungen, die nicht auf den in der Figur gezeichneten Parabeln liegen, sondern anderen Parabelsystemen angehören, auf welche weiter unten (S. 13) eingegangen wird; die Zeichnung würde jedoch sehr an Übersichtlichkeit verlieren, falls alle Lösungen eingetragen würden. Es ergeben sich auf diese Weise innerhalb des Zahlengebiets von 1 bis 200 überhaupt 302 Lösungen der Pythagoreischen Gleichung.

§ 6.

Gerade Linie und Parabel.

Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, daß die Gleichung einer auf den Koordinatenanfang als Brennpunkt und die x-Achse als Achse bezogenen Parabel in paraboloischen Koordinaten ausgedrückt — a und b sind konstante Größen —

$$4) \qquad \xi = a \qquad \text{oder} \qquad \eta = b$$

lautet, je nachdem der Scheitel der Parabel auf der ξ- oder η-Achse d. h. auf der positiven oder der negativen Hälfte der x-Achse angenommen wird. Im allgemeinen wird die Gleichung einer

[1]) Eine Tafel Pythagoreischer Dreiecke findet sich u. a. auch in der Sammlung trigonometrischer Aufgaben von A. Wiegand, Leipzig 1852; sie enthält 131 wesentliche Lösungen.

beliebigen Kurve [1]), welche im Cartesischen Koordinatensystem $F(x, y) = 0$ ist, im parabolischen System

$$5) \qquad F\left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{c}, \frac{2\xi\eta}{c}\right) = 0$$

lauten, während sich bei Anwendung von Polarkoordinaten die Gleichung

$$5a) \qquad F(r, \varphi) = 0 \text{ in } F\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{c}, 2 \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}\right) = 0$$

verwandelt. Umgekehrt geht die in parabolischen Koordinaten ausgedrückte Gleichung einer Kurve $F(\xi, \eta) = 0$ für Cartesische Koordinaten in

$$5b) \quad F\left[\sqrt{\frac{c}{2}}(\sqrt{x^2 + y^2} + x), \sqrt{\frac{c}{2}}(\sqrt{x^2 + y^2} - x)\right] = 0,$$

für Polarkoordinaten in

$$5c) \qquad F\left[\sqrt{cr} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}, \sqrt{cr} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\right] = 0$$

über. Machen wir zu diesen Umformungen einige Beispiele.

Die Gleichung einer geraden Linie, welche mit der ξ-Achse, also mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel α bildet und deren Durchschnittspunkt mit dieser Achse die Abscisse a hat, lautet in parabolischen Koordinaten

$$6) \qquad \xi^2 - \eta^2 = 2\xi\eta \operatorname{ctg}\alpha + ac.$$

Es empfiehlt sich nämlich, die Form $x = y \cdot \operatorname{ctg}\alpha + a$ der Gleichung der geraden Linie anzuwenden, weil es in unserem Koordinatensystem eine „Ordinatenachse" nicht giebt oder wenigstens diese keine andere Rolle spielt, wie jeder andere durch den Nullpunkt gelegte Strahl.

Setzen wir $\eta = 0$, so erhalten wir für den Abschnitt auf der ξ-Achse, wie es sein muß, $x^{\xi} = \xi^2 : c = a$. Würde dagegen $\xi = 0$ gesetzt, so ergiebt sich $x_{\eta} = \eta^2 : c = -a$, was nicht möglich ist, so lange a eine positive Strecke vorstellt; die η-Achse wird also unter dieser Annahme von der Geraden 6) nicht geschnitten. Ist $a = 0$, so geht die Gerade durch den Koordinatenanfang; ihre Gleichung ist dann

$$\xi^2 - \eta^2 = 2\xi\eta \operatorname{ctg}\alpha \quad \text{oder} \quad \left(\eta - \xi \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\eta + \xi \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

d. h.

$$\eta = \xi \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \eta = -\xi \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Das erste Resultat bezieht sich auf den in der ersten Halbebene liegenden Strahl der Geraden, das zweite auf den anderen Strahl. Ist $\alpha = 90^0$ und $a = 0$, so ist $\xi^2 - \eta^2 = 0$, also $\eta = \xi$ und $\eta = -\xi$ die Gleichung der beiden Strahlen, welche auf der Achse im Koordinatenanfang senkrecht stehen; ist $\alpha = 90^0$, a indessen von 0 verschieden, so ergiebt sich $\xi^2 - \eta^2 = ac$ als Gleichung der Senkrechten zur Achse in der Entfernung a vom Nullpunkt. Ist endlich $\alpha = 0^0$ und nähert sich mit ins Unendliche wachsendem a das Produkt $a \operatorname{tg}\alpha$ der Grenze $-a_1$, so hat man es mit einer Parallelen zur Achse im Abstande a_1 zu thun, deren Gleichung $2\xi\eta = a_1 c$ ist.

Während die Gleichung der geraden Linie in beliebiger Lage im parabolischen Koordinaten-

[1]) Vergl. G. Holzmüller a. a. O. S. 104.

ſyſtem vom zweiten Grade iſt, ergiebt ſich für eine beliebig gelegene Parabel im allgemeinen eine Gleichung vierten Grades. Als Beiſpiel merken wir uns die Scheitelgleichung einer Parabel, deren Achſe mit der ξ-Achſe zuſammenfällt und deren Parameter $2p$ iſt, nämlich

$$7) \qquad \xi^2 \eta^2 = \frac{1}{2} cp (\xi^2 - \eta^2) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\xi^2} = \frac{2}{cp}.$$

Sobald jedoch der Brennpunkt der Parabel im Koordinatenanfang liegt, iſt ihre Gleichung vom erſten Grade. Um dies einzuſehen, nehmen wir die allgemeine Form der Gleichung erſten Grades

$$8) \qquad \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} = 1,$$

quadrieren und führen vermittelſt 5b) die Carteſiſchen Koordinaten ein. Wir erhalten

$$b^2 c (\sqrt{x^2 + y^2} + x) + a^2 c (\sqrt{x^2 + y^2} - x) + 2 abcy - 2 a^2 b^2 = 0.$$

Beſeitigen wir die Wurzeln und ſetzen zur Abkürzung

$$\sin \alpha = \frac{2 ab}{a^2 + b^2} \text{ d. h. } \cos \alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad p = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2) c},$$

ſo ergiebt ſich

$$(x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 - 4 p (x \cos \alpha - y \sin \alpha) - 4 p^2 = 0$$

oder, wenn wir das Koordinatenſyſtem um den Winkel $-\alpha$ drehen,

$$y_1^2 = 4 p x_1 + 4 p^2.$$

Die durch Gleichung 8) dargeſtellte Kurve (Fig. 4) iſt alſo in der That eine Parabel, deren Brennpunkt der Koordinatenanfang iſt; ihr Parameter iſt $4p$. Setzen wir der Reihe nach $\eta = 0$, $\xi = 0$, $\eta = \xi$, $\eta = -\xi$, ſo erhalten wir für die Abſchnitte, welche die Parabel auf den Achſen des Koordinatenſyſtems (x, y) erzeugt,

$$OA = \frac{a^2}{c}, \quad OB = \frac{b^2}{c}, \quad OC = \frac{2 a^2 b^2}{(a+b)^2 \cdot c}, \quad OD = \frac{2 a^2 b^2}{(a-b)^2 \cdot c} \text{ und } OS = p.$$

Dieſe Abſchnitte ſtehen alſo unter einander beiſpielsweiſe in folgender Beziehung:

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OS} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OD},$$

welche, da die Größe von a und b willkürlich angenommen werden kann, für jede Parabel gilt. Wir erhalten mithin den bekannten Satz[1]): In jeder Parabel iſt der halbe Parameter das harmoniſche Mittel zu den Abſchnitten einer beliebigen Brennpunktsſehne.

Von beſonderen Fällen der Gleichung 8) heben wir folgende hervor. Iſt a oder b unendlich groß, ſo wird eine η- oder ξ-Parabel des paraboliſchen Koordinatenſyſtems erhalten. Wenn aber $b = \pm a$ iſt, ſo ergeben ſich die Gleichungen

$$8a) \qquad \xi + \eta = s \quad \text{und} \quad \xi - \eta = d,$$

welche für konſtante Werte von s und d zwei Syſteme von Parabeln vorſtellen, deren gemeinſame Achſe auf der ξ-Achſe ſenkrecht ſteht und deren Brennpunkt natürlich der Koordinatenanfang iſt. Ihre Gleichungen in Carteſiſchen Koordinaten ſind

[1]) Vergl. E. Gruhl a. a. O. S. 110, 148 und 178. Auf die Konſtruktion des harmoniſchen Mittels mit Anwendung der Parabel ſcheint zuerſt A. Wiegand im Jahre 1845 aufmerkſam gemacht zu haben. S. deſſen Analytiſche Geometrie. 6. Aufl. Halle, 1882. S. 46.

$$x^2 = -2\frac{s^2}{c}y + \left(\frac{s^2}{c}\right)^2 \quad \text{und} \quad x^2 = 2\frac{d^2}{c}y + \left(\frac{d^2}{c}\right)^2;$$

aus ihnen ist mühelos zu erkennen, daß beide Scharen von Parabeln orthogonal sind. Auch auf einem anderen Wege lassen sich diese Systeme ableiten. Nach 1a) ist

$$x = \frac{\xi^2 - \eta^2}{c}, \quad y = \frac{2\xi\eta}{c}.$$

Dafür aber läßt sich schreiben

$$x = \frac{(\xi + \eta)}{c}\frac{(\xi - \eta)}{c} = \frac{s \cdot d}{c}, \quad y = \frac{2}{c}\left[\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)^2\right] = \frac{s^2 - d^2}{2c};$$

s und d spielen also geradezu die Rolle von ξ und η, wofern 2c an Stelle von c dem System zu Grunde gelegt und eine Vertauschung der Koordinatenachsen vorgenommen wird. Die s- und d-Parabeln schneiden sich also ebenfalls unter rechten Winkeln, die Entfernungen ihrer Scheitel vom Brennpunkte jedoch sind immer nur die Hälfte der Abstände bei den entsprechenden ξ- und η-Parabeln.

Dies neue System orthogonaler Parabeln ergiebt in den Schnittpunkten die noch fehlenden Punkte der Fig. 3) (S. 10), deren Abscissen und Ordinaten Lösungen der Pythagoreischen Gleichung sind.

§ 7.

Ellipse und Hyperbel.

Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$9) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

und suchen ihre Bedeutung zu ermitteln. Dazu führen wir am zweckmäßigsten Polarkoordinaten ein. Vermittelst 5c) erhalten wir nach einigen Umformungen

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \text{ wo } p = \frac{2a^2b^2}{(a^2 + b^2)c}, \quad \varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Somit ergiebt sich das nicht uninteressante Resultat, daß Gleichung 9) die Brennpunktsgleichung eines Kegelschnittes ist, der 2p zum Parameter und ε zur numerischen Excentricität hat. Um seine Art zu erkennen, bringen wir 9) auf die Form

$$9a) \qquad (1 - \varepsilon)\xi^2 + (1 + \varepsilon)\eta^2 = cp$$

und unterscheiden folgende Fälle.

1) Ist $\varepsilon = 0$, also $a^2 = b^2$, so ist $r = p$ d. h. $\xi^2 + \eta^2 = a^2$, also 9) die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Koordinatenanfang und dessen Radius $a^2 : c$ ist.

2) Ist $\varepsilon = 1$, so wird, da immer $\frac{1 - \varepsilon}{cp} = \frac{1}{a^2}$, $\frac{1 + \varepsilon}{cp} = \frac{1}{b^2}$ ist, $a = \infty$, also $\eta^2 = b^2$ oder $\eta = b$. Die Gleichung 9) bedeutet mithin in diesem Falle eine η-Parabel mit der Scheitelentfernung $b^2 : c$. Ist dagegen $\varepsilon = -1$, so wird $b = \infty$, also ergiebt sich $\xi^2 = a^2$ oder $\xi = a$ d. h. eine ξ-Parabel mit der Scheitelentfernung $a^2 : c$.

3) Ist $0 < \varepsilon < 1$, also unter Voraussetzung eines reellen a und b $a^2 > b^2$, so stellt die Gleichung 9) eine Ellipse vor, für welche die große Achse $(a^2 + b^2) : c$, die kleine Achse $(2ab) : c$, die geometrische Excentricität $(a^2 - b^2) : c$ ist; sie schneidet von der ξ-Achse das Stück $a^2 : c$, von der η-Achse das Stück $b^2 : c$ ab. Ist aber $-1 < \varepsilon < 0$, also $a^2 < b^2$, so liegt der zweite Brenn-

punkt der Ellipse im Anfangspunkt der Koordinaten, während im übrigen die Verhältnisse sich nicht wesentlich ändern.

4) Die Fälle $1 < \varepsilon < \infty$ und $-1 > \varepsilon > -\infty$ können nur eintreten, wenn entweder a oder b rein imaginär ist. Setzen wir z. B. $a = a_1$, $b = ib_1$ und $a_1^2 > b_1^2$, so liefert 9) die Gleichung

9b) $$\frac{\xi^2}{a_1^2} - \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1$$

als Gleichung eines Zweiges einer Hyperbel und zwar desjenigen Zweiges, dessen benachbarter Brennpunkt nicht im Koordinatenanfang, sondern auf der ξ-Achse im Abstande $(a_1^2 + b_1^2) : c$ vom Nullpunkt liegt; der andere zur Hyperbel gehörige Zweig, dessen benachbarter Brennpunkt in den Koordinatenanfang fällt, hat die Gleichung

9c) $$\frac{\xi^2}{b_1^2} - \frac{\eta^2}{a_1^2} = 1.$$

Die Hauptachse der Hyperbel ist $(a_1^2 - b_1^2) : c$, die Nebenachse $(2\,a_1\,b_1) : c$ und die Scheitelabstände vom Nullpunkt $a_1^2 : c$ für 9b), $b_1^2 : c$ für 9c) Für $a_1 = (1 + \sqrt{2})\,b_1$ wird die Hyperbel gleichseitig und für $a_1 = b_1$ geht sie in eine gerade Linie über, die auf der ξ-Achse senkrecht steht und vom Koordinatenanfang die Entfernung $a_1^2 : c$ hat.

§ 8.

Die Fußpunktkurve des Kreises.

Die Gleichung der aus einem inneren und einem äußeren Blatt bestehenden Cartesischen Ovale, welche in Polarkoordinaten bekanntlich

$$r^2 - r\,(b\cos\varphi + a) + \varkappa^2 = 0$$

ist, lautet vermöge 5a) in parabolischen Koordinaten

10) $$(\xi^2 + \eta^2)^2 = c\,[(a + b)\,\xi^2 + (a - b)\,\eta^2] - c^2\,\varkappa^2.$$

Uns interessiert an dieser Stelle vornehmlich der besondere Fall, in welchem die Konstante $\varkappa = 0$ ist. Dann stellt die Gleichung

10a) $$(\xi^2 + \eta^2)^2 = c\,[(a + b)\,\xi^2 + (a - b)\,\eta^2]$$

die Fußpunktkurve eines Kreises (Fig. 5) mit dem Radius a dar, wofern der Pol P vom Mittelpunkte O des Kreises die Entfernung b hat und die vom Pol nach dem Centrum gezogene Linie zur Polar- oder ξ-Achse genommen wird. Falls a oder b gleich 0 ist, geht die Kurve in einen Kreis über. Liegt dagegen der Pol auf der Peripherie des Kreises, so ist $b = a$ und wir erhalten die einfache Gleichung

10b) $$\xi^2 + \eta^2 = \alpha\,\xi \quad , \qquad \alpha = \sqrt{2\,a\,c} \quad ,$$

als Gleichung einer Kardioide (Fig. 6.), deren Rückkehrpunkt mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt und deren auf der ξ-Achse liegender Scheitel vom Nullpunkte den Abstand 2 a hat. Die Gleichung

10c) $$\xi^2 + \eta^2 = \alpha\,\eta \quad , \qquad \alpha = \sqrt{2\,a\,c} \quad .$$

drückt offenbar eine 10b) kongruente Kardioide aus, welche sich von dieser nur durch ihre Lage unterscheidet.

Zur bequemeren Konstruktion der durch 10 a) gegebenen Kurve möge daran erinnert werden, daß dieselbe auch mit dem Kreise, dessen Durchmesser b ist, im engsten Zusammenhange steht und in bezug auf diesen als Kreiskonchoide bezeichnet werden kann. Man hat nur alle von einem

beliebigen Punkte der Peripherie des Kreises aus gezogenen Sehnen um die Strecke a zu verlängern oder zu verkürzen, um auf die einfachste Weise die Kurve zu erhalten. Ist dabei $b = 2a$, so liefert die Kurve übrigens eine auch anderweitig bekannte Lösung für die Dreiteilung eines Winkels.

Von größerer Wichtigkeit indessen ist der Umstand, daß sich unsere Kurve auch als verlängerte oder verkürzte Epicykloide ansehen läßt, falls der Radius des rollenden Kreises dieselbe Größe hat, wie der des festen. Ist a der Durchmesser der beiden Kreise und bedeutet b den doppelten Abstand des die Rollkurve beschreibenden Punktes vom Mittelpunkte des rollenden, so erhält man, wie bekannt, die Gleichung der Epicykloide durch Elimination des Wälzungswinkels ω der Centrale aus den Gleichungen

$$x_1 = a \cos \omega - \frac{1}{2} b \cos 2\omega \quad , \qquad y_1 = a \sin \omega - \frac{1}{2} b \sin 2\omega .$$

Diese beziehen sich auf ein Koordinatensystem $(x_1, y_1,)$ für welches der Mittelpunkt des festen Kreises Anfangspunkt ist und die Abscissenachse durch die Centrale der Anfangslage gegeben wird. Je nachdem dabei $b \lesseqgtr a$ ist, wird eine verlängerte oder verkürzte Rollkurve erhalten.

Würden wir den Koordinatenanfang in der Abscissenachse um $\frac{1}{2}$ b verschieben und daher mit Anwendung paraboliſcher Koordinaten

$$x_1 = \frac{b}{a} - \frac{\xi^2 - \eta^2}{c} \quad , \qquad y_1 = \frac{2\,\xi\,\eta}{c}$$

setzen, so würde sich durch Elimination von ω Gleichung 10a) ergeben und damit die Übereinstimmung jener Fußpunktkurve mit der Rollkurve bewiesen sein. Wenn dagegen der Koordinatenanfang um ein Stück $\frac{a^2}{2b}$ verlegt werden soll, so ist, falls ξ_1, η_1 die auf den neuen Anfangspunkt A bezüglichen Koordinaten sind,

$$x_1 = \frac{a^2}{2b} - \frac{\xi_1^{\,2} - \eta_1^{\,2}}{c} \quad , \qquad y_1 = \frac{2\,\xi_1\,\eta_1}{c}$$

zu setzen. In diesem Falle erhalten wir ein besonders einfaches Resultat, nämlich

10d) $$(\xi_1 - \alpha_1)^2 + \eta_1^{\,2} = \rho_1^{\,2} \quad , \qquad \alpha_1 = a\sqrt{\frac{c}{2b}} \quad , \qquad \rho_1^{\,2} = \frac{bc}{2} .$$

Für $b = a$ stimmen beide Koordinatentransformationen überein und es ergiebt sich die Gleichung 10b) der Kardioide.

Schließlich ist zu erwähnen, daß die hier betrachtete Kurve auch als Pascal'sche Schnecken-linie (limaçon) bezeichnet[1]) wird; außerdem hat Herr Holzmüller, um den Zusammenhang mit der Kardioide hervorzuheben, für dieselbe die Benennung „Kardioidische Kurve" in Vorschlag gebracht.

§ 9.

Die Inversion.

An einigen einfachen Beispielen haben wir bisher gezeigt, auf welche Weise die Gleichung einer gegebenen Kurve in paraboliſchen Koordinaten ausgedrückt wird. Wir haben dabei gefunden, daß immer je zwei Linien sich derselben Form der Kurvengleichung erfreuen, daß also z. B. den Kreisen $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ eine Schar von kardioidischen Kurven mit der Gleichung

[1]) S. G. Holzmüller a. a. O. S. 125.

$(\xi - \alpha)^2 + \eta^2 = \rho^2$ entspricht. Dies läßt sich auch folgendermaßen aussprechen: Die durch Gleichung 1) angedeutete konforme Abbildung der $\xi\eta$-Ebene auf die xy-Ebene verwandelt im allgemeinen[1]

gerade Linien	in	konfokale Parabeln,
gleichseitige Hyperbeln	in	gerade Linien,
Lemniskaten	in	Kreise,
Kreise	in	kardioidische Kurven.

Eine andere, nicht minder wichtige Umformung eines gegebenen Kurvensystems in ein neues ist die Inversion. Beschränken wir uns auf den Koordinatenanfang als Inversionscentrum und bezeichnen mit $\varkappa^2$ das konstante Rechteck zweier zu derselben Anomalie φ gehörigen Radienvektoren r und r_1, so geht die Kurve mit der Polargleichung

$$F(r, \varphi) = 0 \text{ über in } \quad F(r_1, \varphi_1) = F\left(\frac{\varkappa^2}{r}, \varphi\right) = 0.$$

Dieselbe Transformation verwandelt die in paraboliſchen Koordinaten ausgedrückte Kurve

$$11) \quad F(\xi, \eta) = 0 \quad \text{in} \quad F(\xi_1, \eta_1) = F\left(\frac{\varkappa c}{\xi^2 + \eta^2}\xi, \frac{\varkappa c}{\xi^2 + \eta^2}\eta\right) = 0.$$

Daraus ist zu erkennen, daß, sobald die willkürlichen Konstanten $\varkappa$ und c gleich sind, der Übergang von einer Kurve zu ihrer inversen sich im paraboliſchen Koordinatensystem in genau derselben Weise vollzieht wie bei Carteſiſchen Koordinaten. Somit hat die inverse Kurve der Parabel 8) die Gleichung

$$11a) \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 = \varkappa c\left(\frac{\xi_1}{a} + \frac{\eta_1}{b}\right);$$

sie ist also eine Kardioide, für welche der Koordinatenanfang Rückkehrpunkt ist und deren in der Hauptachse liegende Sehnenabschnitte $\frac{\varkappa^2 c}{a^2}$ und $\frac{\varkappa^2 c}{b^2}$ sind. Die Fußpunktkurve des Kreises, deren Gleichung 10a) war, liefert bei der Abbildung durch reciproke Radienvektoren die Kurve

$$11b) \qquad \frac{\xi_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta_1^2}{b_1^2} = 1, \qquad a_1^2 = \frac{\varkappa^2 c}{a+b}, \qquad b_1^2 = \frac{\varkappa^2 c}{a-b},$$

d. h. einen Kegelschnitt, von welchem der eine Brennpunkt mit dem Nullpunkt und die große Achse mit der Hauptachse zusammenfällt. Dieselbe Kurve als Epicykloide betrachtet (Gleichung 10d) und somit auf ein anderes Koordinatensystem bezogen ergiebt als inverse Kurve

$$11c) \quad (\xi - \alpha)^2 + \eta^2 = \rho^2, \quad \alpha = \frac{\varkappa a\sqrt{2bc}}{a^2 - b^2}, \quad \rho^2 = \frac{2\varkappa^2 b^3 c}{(a^2 - b^2)^2}.$$

Das sphäriſche Spiegelbild einer kardioidiſchen Kurve ist somit bei passender Wahl des Inversionscentrums eine Kurve von derselben Art[2]. Die Kurve ist also (ebenso wie das Carteſiſche Oval) anallagmatiſch; für $2\varkappa b = a^2 - b^2$ ist sogar das Spiegelbild der Kurve kongruent. Dies Resultat war von vornherein zu erwarten, da die Kurve in jeder Hinsicht das Analogon des Kreises ist. Es ist aber auch von Wichtigkeit für eine Reihe von Aufgaben aus der mathematiſchen Phyſik. Die Aufgabe, für einen von zwei excentriſchen Kugeln gebildeten Raum die Potentialgleichung zu integrieren, lösten Thomſon, Dirichlet und C. Neumann bekanntlich dadurch, daß ſie die Kugeln

[1]) S. G. Holzmüller a. a. O. S. 126 und 127.

[2]) Vergl. G. Holzmüller a. a. O. S. 127.

durch Abbildung mittels reciproker Radienvektoren in koncentrische verwandelten. In derselben Weise läßt sich die Lösung der Potentialaufgabe für einen schalenförmigen Körper durchführen, der durch Rotation zweier beliebigen kardioidischen Kurven um die gemeinsame Achse entsteht; man hat eben nur durch Inversion die beiden Flächen in „koncentrische", wenn man so sagen darf, zu verwandeln und die Lösung auf diesen Fall zurückzuführen. Da wir gesehen haben, daß die Meridiane der Rotationsflächen inverse Kegelschnitte sind, so sind die Funktionen, welche die Lösung vermitteln, keine höheren als Kugelfunktionen oder zu diesen gehörige Grenzfunktionen.

Der einfachste Fall der genannten Aufgabe ist offenbar derjenige, in welchem die kardioidischen Kurven zu Kardioiden mit gemeinsamem Rückkehrpunkt geworden sind. Derselbe entspricht dem Grenzfalle der sich im Nullpunkte berührenden Kreise bez. Kugeln. Bei dieser und einigen anderen Aufgaben ist es dann ganz zweckmäßig, an Stelle des parabolischen Koordinatensystems (ξ, η) direkt kardioidische Koordinaten (ξ_1, η_1) zu verwenden. Ihren Zusammenhang mit den Cartesischen Koordinaten zeigen die Gleichungen

$$12) \qquad x = \varkappa^2 c \frac{\xi_1^2 - \eta_1^2}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2}, \qquad y = \varkappa^2 c \frac{2\,\xi_1\,\eta_1}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2};$$

$$12a) \left(x^2 + y^2 - \frac{\varkappa^2 c}{2\xi_1^2} x\right)^2 = \left(\frac{\varkappa^2 c}{2\xi_1^2}\right)^2 (x^2 + y^2), \left(x^2 + y^2 + \frac{\varkappa^2 c}{2\eta_1^2} x\right)^2 = \left(\frac{\varkappa^2 c}{2\eta_1^2}\right)^2 (x^2 + y^2).$$

Letztere sind für konstante Werte von ξ_1 und η_1 die Gleichungen zweier Systeme von orthogonalen Kardioiden (Fig. 6), deren gemeinsamer Rückkehrpunkt in den Koordinatenanfang fällt und deren Achsen in der Hauptachse liegen.

In diesem Koordinatensystem spielen demnach Kardioiden die Rolle der konfokalen Parabeln des parabolischen Systems. Jeder Punkt der Ebene bestimmt sich durch den Schnitt zweier Kardioiden, von denen die eine ihren Scheitel auf der positiven, die andere auf der negativen Hälfte der x-Achse hat. Wie bei den parabolischen Koordinaten kann man die Festsetzung treffen, daß ξ_1 nur positive Werte annimmt, während η_1 in der Halbebene $(x, +y)$ positiv, in der Halbebene $(x, -y)$ negativ ist. Die Grenzen für ξ_1 und η_1 sind dieselben wie bei den parabolischen Koordinaten (ξ, η), aber in umgekehrter Reihenfolge; denn die Scheitel der in einander geschachtelten Kardioiden entfernen sich vom Koordinatenanfang um so weiter, je kleinere Werte ihre Parameter ξ_1 und η_1 annehmen. Für alle Punkte, welche auf der negativen Hälfte der x-Achse oder in unendlicher Ferne liegen, ist $\xi_1 = 0$; dagegen hat η_1 den Wert 0 für alle in der positiven x-Achse oder in der Unendlichkeit liegenden Punkte Für den Anfangspunkt der Koordinaten ist sowohl ξ_1 als η_1 gleich ∞.

Die Gleichung $\xi_1 = a$ bedeutet also im Kardioidensystem eine bestimmte Kardioide und in entsprechender Weise lassen sich die Gleichungen anderer Kurven in diesen Koordinaten ausdrücken. Da die Durchführung von Beispielen unnötig erscheint, so begnügen wir uns mit dem Hinweis, daß bei einem Vergleich der Kurven im kardioidischen und im Cartesischen System im allgemeinen

geraden Linien	kardioidische Kurven,
gleichseitigen Hyperbeln	Kreise,
Lemniskaten	gerade Linien,
Kreisen	Parabeln

entsprechen.

§ 10.

Entfernung zweier Punkte. Differentiale.

Es ist selbstverständlich, daß die parabolischen Koordinaten außer bei physikalischen Fragen auch bei der Diskussion ebener Kurven, insbesondere solcher, deren Gleichung in diesen Koordinaten eine einfache Gestalt hat, mit Vorteil angewandt werden können. Indessen müssen wir es uns hier versagen, ein dahin gehöriges Beispiel vollständig durchzuführen; es mag genügen, einzelne Punkte hervorgehoben zu haben.

1. Der Ausdruck für das Quadrat der Entfernung zweier Punkte $P(x,y)$, $P_0(x_0, y_0)$

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

nimmt durch Einführung parabolischer Koordinaten mittels 1a) und der entsprechenden Formeln für x_0 und y_0 mehrere bemerkenswerte Formen an. Diese sind

$$13)\quad R^2 = \frac{1}{c^2}\Big[(\xi+\xi_0)^2+(\eta+\eta_0)^2\Big]\Big[(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2\Big]$$
$$= \frac{1}{c^2}\Big[(\xi^2+\eta^2+\xi_0^2+\eta_0^2)^2 - (2\xi\xi_0+2\eta\eta_0)^2\Big]$$
$$= \frac{1}{c^2}\Big[(\xi^2+\eta^2-\xi_0^2-\eta_0^2)^2 + (2\xi\eta_0-2\xi_0\eta)^2\Big],$$

von denen bald die eine, bald die andere Verwendung findet.

2. Aus 1a) folgt durch partielle Differentiation

$$\frac{\delta x}{\delta \xi} = \frac{2\xi}{c}, \quad \frac{\delta x}{\delta \eta} = -\frac{2\eta}{c}; \qquad \frac{\delta y}{\delta \xi} = \frac{2\eta}{c}, \quad \frac{\delta y}{\delta \eta} = \frac{2\xi}{c}.$$

Daher ergiebt sich

$$\frac{\delta x}{\delta \xi}\,\frac{\delta x}{\delta \eta} + \frac{\delta y}{\delta \xi}\,\frac{\delta y}{\delta \eta} = 0;$$

dies ist der analytische Ausdruck für die Orthogonalität der beiden Parabelscharen. Weiter erhalten wir für ein Bogendifferential auf einer ξ- bez. η-Parabel

$$14)\quad ds_\xi^2 = \left[\left(\frac{\delta x}{\delta \eta}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta \eta}\right)^2\right] d\eta^2 = \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\, d\eta^2;$$
$$ds_\eta^2 = \left[\left(\frac{\delta x}{\delta \xi}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta \xi}\right)^2\right] d\xi^2 = \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\, d\xi^2.$$

Da die Parabeln sich unter rechten Winkeln schneiden, so ist das Quadrat eines beliebigen Bogendifferentiales

$$14a)\qquad ds^2 = ds_\xi^2 + ds_\eta^2 = \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\,(d\xi^2+d\eta^2)$$

und das Flächendifferential

$$14b)\qquad df = ds_\xi \cdot ds_\eta = \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\, d\xi\, d\eta.$$

Demnach erhalten wir für die Länge s des Bogens $P_0 P_1$ (Fig. 7) einer Parabel $\xi = \xi_0$, welcher durch die konfokalen Parabeln $\eta = \eta_0$ und $\eta = \eta_1$ herausgeschnitten wird, das einfache Integral

$$s = \frac{2}{c}\int_{\eta_0}^{\eta_1} \sqrt{\xi_0^2+\eta^2}\,d\eta = \frac{\xi_0^2}{c}\Big|\, u + \operatorname{Sin} u \operatorname{Cof} u \,\Big|_{u_0}^{u_1}, \quad \eta_i = \xi_0 . \operatorname{Sin} u,$$

14c)

$$s = \frac{1}{c}\left(\eta_1\sqrt{\xi_0^2+\eta_1^2} - \eta_0\sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2} + \xi_0^2 \lg \frac{\eta_1+\sqrt{\xi_0^2+\eta_1^2}}{\eta_0+\sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2}}\right).$$

Wurde der Bogen vom Scheitel Q aus gerechnet, für welchen $\eta_0 = 0$ ist, so folgt

14d) $$s_1 = \frac{1}{c}\left(\eta_1\sqrt{\xi_0^2+\eta_1^2} + \xi_0^2 \lg \frac{\eta_1+\sqrt{\xi_0^2+\eta_1^2}}{\xi_0}\right).$$

Liegen R_0 und R_1 auf der Parabel $\xi = \xi_1$ und bezeichnen wir den Flächeninhalt des von vier Parabelbogen gebildeten Rechtecks $P_0 P_1 R_1 R_0$ mit F, so liefert die Gleichung 14b)

14e) $$F = \frac{4}{c_2}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1} (\xi^2+\eta^2)\,d\xi\,d\eta = \frac{4}{3c^2}\Big[(\xi_1-\xi_0)(\eta_1^3-\eta_0^3) + (\xi_1^3-\xi_0^3)(\eta_1-\eta_0)\Big].$$

Ist $\xi_0 = \eta_0 = 0$, so ergiebt sich der Flächeninhalt des von der Strecke SS_1 und den Parabelbogen SR_1 und $S_1 R_1$ begrenzten Dreiecks, nämlich

14f) $$F_1 = \frac{4}{3c^2}\,\xi_1\,\eta_1\,(\xi_1^2+\eta_1^2).$$

Man bemerke, daß in der Figur $OQ = \xi_0^2 : c$, $OS_0 = \eta_0^2 : c$, $OS = \xi_1^2 : c$, $OS_1 = \eta_1^2 : c$, $OP_1 = (\xi_0^2+\eta_1^2) : c$, $OR_1 = (\xi_1^2+\eta_1^2) : c$ und die zur Achse Senkrechte $R_1 T = (2\,\xi_1\,\eta_1) : c$ ist.

3. Der in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle spielende Differentialausdruck

$$\Delta u = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}$$

nimmt durch Einführung paraboloischer Koordinaten wegen 14a) die Gestalt

15) $$\frac{4(\xi^2+\eta^2)}{c^2}\Delta u = \frac{\delta^2 u}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta \eta^2}$$

an. Da die Integration dieser Differentialgleichung, es mag Δu gleich null oder eine Funktion der Zeit, nämlich $\propto \frac{\delta u}{\delta t}$ oder $\propto \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}$, sein, keine erheblicheren Schwierigkeiten bietet, so erkennen wir, daß die Behandlung von Aufgaben, welche die Verteilung der Elektricität und Wärme in einer paraboloischen Platte, sowie die Schwingungserscheinungen einer solchen betreffen, durchführbar ist.

§ 11.

Die logocyklische Kurve. Graphische Darstellung der Logarithmen.

Die logocyklische Kurve[1]), welche auch Kukumaeide, harmonische Kurve und gerade Strophoide genannt wird, ist für uns deshalb von besonderem Interesse, weil sie in Verbindung mit einem System konfokaler Parabeln die geometrische Darstellung der Logarithmen mit Leichtigkeit ermöglicht.

Stellen wir uns die Aufgabe, die Fußpunktkurve einer Parabel für einen in der Achse liegenden Pol P zu bestimmen, so empfiehlt es sich die Scheitelgleichung der Parabel in Anwendung zu bringen. Diese ist nach 7), wenn wir $op = -2\,\xi_0^2$ setzen, woraus die Lage der Kurve hervorgeht,

$$\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\eta^2} = \frac{1}{\xi_0^2}.$$

1) Vergl. S. Günther a. a. O. 3. und 5. Kap.

Hat der Punkt P vom Scheitel den Abstand g, so ergiebt sich als Gleichung der Fußpunktlinie

16) $(\xi^2+\eta^2)^2(cg+\xi_0^2-\xi^2+\eta^2)=(\xi^2-\eta^2)[c^2g^2-(cg-\xi_0^2)(\xi^2-\eta^2)]$.

Je nachdem in dieser Gleichung $g=-\xi_0^2:c$, $g=0$ oder $g=\xi_0^2:c$ ist, erhalten wir als Fußpunktkurve der Parabel die Scheiteltangente derselben, eine Cissoide oder die Logocyklik. Die Gleichung dieser ist

16a) $(\xi^2+\eta^2)^2(2\xi_0^2-\xi^2+\eta^2)=\xi_0^4(\xi^2-\eta^2)$ oder $\dfrac{1}{(\xi^2+\eta^2)^2}+\dfrac{1}{\xi_0^4}=\dfrac{2}{\xi_0^2(\xi^2-\eta^2)}$.

Andrerseits werden wir, was der Aufmerksamkeit der Geometer bisher entgangen zu sein scheint, auch durch Inversion auf die logocyklische Kurve geführt. Wird eine gleichseitige Hyperbel von ihrem Mittelpunkte aus durch reciproke Radienvektoren abgebildet, so wird bekanntlich eine Lemniskate erhalten, während die Abbildung von einem der Brennpunkte aus (Seite 16) auf eine kardioidische Kurve führt. Suchen wir das sphärische Spiegelbild der gleichseitigen Hyperbel für den Scheitel als Inversionscentrum, so ergiebt sich, falls die große Achse $a=\xi_0^2:c=\varkappa$ (vergl. § 9) gesetzt wird, die durch Gleichung 16a) ausgedrückte Logocyklik.

An dritter Stelle endlich zeigt sich der Zusammenhang der logocyklischen Kurve mit einer Schar konfokaler Parabeln bei der Aufgabe: Von einem beliebigen Punkte aus werden an eine Doppelschar konfokaler Parabeln von entgegengesetzter Achsenrichtung Tangenten gelegt; man soll den Ort der Berührungspunkte bestimmen. Sind die Parabeln durch die Gleichungen 8a) gegeben und hat der Punkt die paraboliſchen Koordinaten ξ_0, η_0, so ist der geometrische Ort der Berührungspunkte eine schiefe Strophoide[1]) mit der Gleichung

17) $$\xi^2+\eta^2=(\xi_0^2-\eta_0^2)\frac{\xi\pm\eta}{\xi\mp\eta}\mp 2\xi_0\eta_0,$$

in welcher die oberen Vorzeichen oder die unteren zu nehmen sind. Daraus ist zu erkennen, daß die Kurve aus zwei Zweigen besteht, die einander kongruent sind, sobald der Pol (ξ_0, η_0) in die Hauptachse fällt, also entweder $\xi_0=0$ oder $\eta_0=0$ gesetzt wird. Machen wir $\eta_0=0$, so erhalten wir für die beiden Zweige der logocyklischen Kurve die einfachen Gleichungen[2])

17a) $$\xi^2+\eta^2=\xi_0^2\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}\quad,\quad \xi^2+\eta^2=\xi_0^2\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta};$$

ihre Übereinstimmung mit 16a) läßt sich mühelos darthun. Dividieren wir die Gleichungen durch c und setzen $\xi_0^2:c=a$, so folgt mit Rücksicht auf 3b) und 3c) als Polargleichung der Logocyklik

17b) $$r=a\,.\,\mathrm{tg}\left(45^0\pm\frac{\varphi}{2}\right)=a(\sec\varphi\pm\mathrm{tg}\,\varphi)=a\,.\,e^{\pm u},\ \text{falls}\ \sec\varphi=\mathfrak{Cof}\,u.$$

Hieraus ergiebt sich, daß das Rechteck aus zwei zu derselben Anomalie gehörenden Fahrstrahlen konstant und zwar gleich dem Quadrate der Entfernung des Poles vom Nullpunkte ist; auch die logocyklische Kurve ist mithin anallagmatisch. Außerdem geben diese Formeln eine überaus leichte Konstruktion der einzelnen Punkte der Kurve (Fig. 8. NPS_2OS_2M) an die Hand.

Wir wenden uns nun zu der ursprünglichen Schar konfokaler Parabeln, deren gemeinsame

---

[1]) Diese bildet auch dann noch den geometrischen Ort, wenn statt der Parabeln beliebige konfokale Kegelschnitte genommen werden. Vergl. S. Günther a. a. O. S. 33.

[2]) Wird die Hauptachse des paraboliſchen Koordinatensystems um 90° gedreht, so lauten die Gleichungen der Logocyklik noch einfacher folgendermaßen: $\xi^2+\eta^2=\xi_0^2\frac{\xi}{\eta}$ und $\xi^2+\eta^2=\xi_0^2.\frac{\eta}{\xi}$.

Achse die Hauptachse ist. Die parabolische Entfernung eines Punktes R_1 ($\xi_1\ \eta_1$) von der ξ-Achse, d. h. die Länge s_1 des Bogens $R_1 S$ der durch R_1 gehenden Parabel $\xi = \xi_1$ war nach 14d)

$$18)\qquad s_1 = a_1 + b_1\ ,\quad a_1 = \frac{\eta_1}{c}\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}\ ,\quad b_1 = \frac{\xi_1^2}{c}\lg\frac{\eta_1 + \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}{\xi_1}.$$

Es handelt sich zunächst um die geometrische Deutung dieses Ausdrucks. Legen wir in R_1 die Tangente an die Parabel, welche die Scheiteltangente derselben in V_1 und die Hauptachse in U_1 schneidet, so ist $OR_1 = OU_1$, $V_1 R_1 = V_1 U_1$ und daher $R_1 V_1 = a_1$. Zur Darstellung von b_1 konstruieren wir eine logocyklische Kurve, deren Pol S_2 auf der Hauptachse liegt und von O um $a = \xi_0^2 : c = 1$ entfernt ist. Die Verlängerung von OV_1 schneidet nach 17a) oder 17b) die Kurve in P so, daß $OP = r = (\eta_1 + \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}) : \xi_1$ ist, da ja $OS = \xi_1^2 : c$, $OS_1 = \eta_1^2 : c$, $SV_1 = \xi_1\,\eta_1 : c$, $OV_1 = \xi_1\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} : c$. Mithin ist der zweite Posten von s_1

$$b_1 = \frac{\xi_1^2}{c}\cdot {}^e\log r = {}^n\log r,\ \text{falls}\ \frac{\xi_1^2}{c} = {}^n\log e = \frac{1}{{}^e\log n}$$

der Modul des Logarithmensystems zur Basis n ist. Also hat man die Gleichung

$$18a)\qquad {}^n\log r = s_1 - a_1.$$

Ist im besonderen Falle $\xi_1^2 : c = 1$, so geht die Parabel (Einheitsparabel) durch den Pol der Logocyklik und es treten Vereinfachungen ein. In diesem Falle hat man für den Bogen $R_2 S_2 = s_2$

$$18b)\qquad s_2 = a_2 + b_2;\ a_2 = R_2 V_2,\ b_2 = {}^e\log r,\ \text{d. h.}\ {}^e\log r = s_2 - a_2.$$

Hieraus ergiebt sich für die graphische Darstellung des reellen Logarithmus einer Zahl r zu einer Basis n folgende zuerst von James Booth[1]) gegebene Vorschrift. Man zeichne in das System der ξ-Parabeln eine logocyklische Kurve, deren Pol S_2 vom Nullpunkte O um die Längeneinheit[2]) entfernt ist und deren Achse in die ξ-Achse fällt, darauf schlage man mit Radien, deren Länge n und r Einheiten beträgt, um O Kreise, welche die Logocyklik in Q und P schneiden. Vom Schnittpunkt V_3 des Fahrstrahles OQ mit der Scheiteltangente $S_2 V_2$ der Einheitsparabel aus lege man die zweite Tangente $V_3 R_3$ an die Parabel, trage den rektificierten Parabelbogen $R_3 S_2$ auf $R_3 V_3$ bis L_3 ab und stelle sich eine Strecke dar, deren Maßzahl zu der von $V_3 L_3$ reciprok ist. Dies geschieht am einfachsten dadurch, daß man $V_3 L_3$ als Radiusvektor OM in die Logocyklik einträgt und den Schnittpunkt K mit dem zweiten Kurvenzweige aufsucht. Den Fahrstrahl OK dieses Punktes trage man von O aus auf OS_2 bis S ab, ziehe zu der damit bezeichneten ξ-Parabel die Scheiteltangente, welche OP in V_1 trifft. Von V_1 aus endlich lege man die zweite Tangente $V_1 R_1$ an die Parabel und schneide den rektificierten Parabelbogen $R_1 S$ von R_1 aus auf $R_1 V_1$ bis L_1 ab. Dann ist die Maßzahl der Strecke $V_1 L_1$ der verlangte ${}^n\log r$. — War $n = e$, so vereinfacht sich die Konstruktion wesentlich. Da jetzt $\xi_1^2 : c = {}^e\log e = 1$ ist, so fällt die Hilfsparabel

[1]) J. Booth. 1) A memoir on the trigonometry of the parabola and the geometrical origin of logarithms etc. London, 1856.
2) A treatise on some new geometrical methods etc. London, 1873.
S. S. Günther. a. a. O. S. 32.

[2]) In Fig. 8 ist der besseren Übersichtlichkeit halber die Längeneinheit gleich 30 mm angenommen worden. Die Punkte Q, V_3, R_3, L_3 sind daher in der Figur nicht vorhanden, indessen wurde die entsprechende Konstruktion in den Punkten N, V, R, L durchgeführt. Die Länge von $V_3 L_3$ übrigens hat man in OM und ihre Reciproke in OK.

mit der Einheitsparabel zusammen. OP schneidet deren Scheiteltangente in V_2 und es ist die Maßzahl von $V_2 L_2 = \widehat{R_2 S_2} - \overline{R_2 V_2}$ gleich ${}^e\log r$.

Handelt es sich um die Darstellung des Logarithmus einer Zahl r in allen möglichen Logarithmensystemen, so wird man offenbar von der Darstellung $V_2 L_2$ des Logarithmus dieser Zahl im natürlichen System ausgehen. Dann lassen sich die Logarithmen von r in den übrigen Systemen durch einfache Parallelenkonstruktion finden. Es ist nämlich, da O Ähnlichkeitspunkt der konfokalen Parabeln ist, $V_1 L_1 : V_2 L_2 = OV_1 : OV_2 = OS : OS_2 = OS : 1$, also $V_1 L_1 = OS . V_2 L_2$ oder ${}^n\log r = \frac{\xi_1^2}{c} . {}^e\log r$. Man hat also L_2 mit O zu verbinden und zu $V_2 L_2$ parallele Linien, z. B. $V_1 L_1$ zu ziehen, um log r in den verschiedenen Systemen zu erhalten.

Handelt es sich dagegen um die Darstellung der Logarithmen aller Zahlen in einem und demselben Logarithmensystem, so genügt ebenfalls eine Parabel. Ist das System das natürliche, so ist die entsprechende Parabel die Einheitsparabel. Hier bildet die Folge der Punkte $L, L_2, L_3 \ldots$, deren Konstruktion aus dem Obigen erhellt, die Evolvente der Parabel und es entsprechen deren von der Scheiteltangente der Parabel begrenzte Normalenabschnitte $VL, V_2 L_2, V_3 L_3 \ldots$ den Logarithmen der Zahlen im natürlichen System.

II.

Die paraboliſchen Koordinaten im Raum.

§ 12.

Das Rotationsparaboloid erſter Art.

Bei der Behandlung von Aufgaben, welche das Rotationsparaboloid und verwandte Körper betreffen, ist es zweckmäßig Koordinaten anzuwenden, die sich aus den im vorigen Kapitel betrachteten in einfacher Weise ableiten lassen. Da es jedoch nicht gleichgültig ist, ob die das Paraboloid erzeugende Parabel sich um die Hauptachse oder um die im Nullpunkte auf ihr errichtete Senkrechte dreht, so empfiehlt es sich, ein Rotationsparaboloid erster Art und ein solches zweiter Art zu unterscheiden. Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Rotationsparaboloid erster Art, welches durch Umdrehung der Parabel um die Hauptachse entsteht.

Wir hatten früher gesehen, daß ein Punkt der Halbebene $(x, +y)$ vollständig und eindeutig durch den Schnitt zweier Halbparabeln, von denen die eine der Schar ξ, die andere der Schar η angehört, bestimmt ist. Dabei waren sowohl die Werte von ξ als auch diejenigen von η positiv und variierten zwischen O und ∞. Denken wir uns jetzt die Halbebene mit ihren Parabelscharen als Meridianebene und drehen dieselbe um die x- oder ξ-Achse, bis sie wieder ihre ursprüngliche Lage einnimmt, so erhalten wir zwei Systeme von orthogonalen Rotationsparaboloiden. Bezeichnen wir daher mit φ den Winkel, um welchen die ursprüngliche Halbebene gedreht werden muß, bis ein im Raume gegebener Punkt P in dieselbe falle, so ist klar, daß jeder Punkt des Raumes eindeutig durch die Koordinaten ξ, η, φ bestimmt ist. Um alle Punkte des Raumes zu erhalten, muß man ξ von O bis ∞, η von O bis ∞, φ von 0^0 bis 360^0 variieren lassen.

Die Koordinaten ξ, η, φ des Punktes P sind die Parameter der drei sich in diesem Punkte unter rechten Winkeln schneidenden Flächen, deren Gleichungen sich ohne Mühe aus den Formeln

$$19) \qquad x = \frac{\xi^2 - \eta^2}{c}, \quad y = \frac{2\xi\eta}{c}\cos\varphi, \quad z = \frac{2\xi\eta}{c}\sin\varphi,$$

welche den Zusammenhang der Cartesischen Koordinaten mit den paraboloischen andeuten durch Elimination je zweier der Größen ξ, η, φ ergeben. Wie früher bedeutet auch hier c eine willkürliche konstante Strecke, deren Länge auch, ohne der Allgemeinheit zu schaden, als Einheit gewählt werden kann. Man erhält die Gleichungen

$$19a) \quad y^2 + z^2 = -4\frac{\xi^2}{c}x + 4\left(\frac{\xi^2}{c}\right)^2, \quad y^2 + z^2 = 4\frac{\eta^2}{c}x + 4\left(\frac{\eta^2}{c}\right)^2, \quad y\sin\varphi - z\cos\varphi = 0,$$

von denen die beiden ersten Rotationsparaboloide mit gemeinsamem Brennpunkt und derselben Achse, die letzte deren Meridianebenen vorstellt. Die Paraboloide mit dem Parameter ξ haben ihre Scheitel (Fig. 9), falls c einen positiven Wert hat, sämtlich auf der ξ-Achse d. h. der positiven Hälfte der x-Achse in der Entfernung $\xi^2 : c$ vom Nullpunkte, während die Scheitel der η-Paraboloide sämtlich auf der η-Achse d. h. der negativen Hälfte der x-Achse in der Entfernung $\eta^2 : c$ liegen. Für $\xi = 0$ geht die ξ-Fläche in die η-Achse, für $\eta = 0$ die η-Fläche in die ξ-Achse über. Bedeuten ξ_0, η_0, φ_0 konstante Größen, so lauten die Gleichungen der drei Flächen in paraboloischen Koordinaten

$$19b) \qquad \xi = \xi_0, \qquad \eta = \eta_0, \qquad \varphi = \varphi_0,$$

und es ist klar, daß ein Punkt P (ξ, η, φ) innerhalb, in der Oberfläche oder außerhalb des Umdrehungsparaboloides $\xi = \xi_0$ liegt, je nachdem $\xi \gtreqless \xi_0$ ist. Die paraboloischen Koordinaten werden in Cartesischen durch die Formeln

$$19c) \quad \xi^2 = \frac{c}{2}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + x), \quad \eta^2 = \frac{c}{2}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x), \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y}$$

ausgedrückt, wobei sämtliche Wurzeln mit positiven Vorzeichen zu nehmen sind.

Der nach dem Punkte P (ξ, η, φ) gezogene Radiusvektor hat die Länge

$$20) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{c}.$$

Dagegen erhalten wir für den Abstand R dieses Punktes P von einem zweiten Punkte P_0 $(\xi_0, \eta_0, \varphi_0)$

$$20a) \qquad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

$$= \frac{1}{c^2}\left\{(\xi^2 + \eta^2 + \xi_0^2 + \eta_0^2)^2 - (2\eta\eta_0 + 2\xi\xi_0\cos(\varphi - \varphi_0))^2 - (2\xi\xi_0\sin(\varphi - \varphi_0))^2\right\}.$$

Die Entwickelung des reciproken Wertes von R nach Bessel'schen Funktionen habe ich an einer anderen Stelle[1]) gegeben.

Bilden wir aus 19) die Differentialquotienten von x, y, z nach ξ, η, φ, so zeigt die Gleichung

$$\frac{\delta x}{\delta \xi}\frac{\delta x}{\delta \eta} + \frac{\delta y}{\delta \xi}\frac{\delta y}{\delta \eta} + \frac{\delta z}{\delta \xi}\frac{\delta z}{\delta \eta} = 0$$

an, daß die beiden Scharen der Rotationsparaboloide in der That einander senkrecht durchschneiden; dasselbe ist offenbar auch bei den Meridianebenen der Fall. Mithin ergeben sich, wenn wir noch

[1]) Programm des Gymnasiums zu Cüstrin. 1881. S. 7 bis 9.

21) $$A=\left(\frac{\delta x}{\delta\xi}\right)^2+\left(\frac{\delta y}{\delta\xi}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta\xi}\right)^2,\quad B=\left(\frac{\delta x}{\delta\eta_i}\right)^2+\left(\frac{\delta y}{\delta\eta_i}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta\eta_i}\right)^2,$$
$$C=\left(\frac{\delta x}{\delta\varphi}\right)^2+\left(\frac{\delta y}{\delta\varphi}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta\varphi}\right)^2,\quad D=\sqrt{ABC}$$

setzen, für die Wegelemente auf den drei Flächen die Ausdrücke

21a) $$dw_\xi=\sqrt{A}\,.\,d\xi \qquad dw_\eta=\sqrt{B}\,.\,d\eta_i \qquad dw_\varphi=\sqrt{C}\,.\,d\varphi$$
$$=\frac{2}{c}\sqrt{\xi^2+\eta_i^2}\,.\,d\xi, \qquad =\frac{2}{c}\sqrt{\xi^2+\eta_i^2}\,.\,d\eta_i, \qquad =\frac{2\,\xi\,\eta_i}{c}d\varphi,$$

und daher ist das Quadrat des Linienelements

21b) $$dw^2=dx^2+dy^2+dz^2=dw_\xi^2+dw_\eta^2+dw_\varphi^2$$
$$=\frac{4}{c^2}\left[(\xi^2+\eta_i^2)\,d\xi^2+(\xi^2+\eta_i^2,\,d\eta_i^2+\xi^2\eta_i^2 d\varphi^2\right].$$

Weiter sind die Flächenelemente in den drei Flächen

21c) $$df_\xi=dw_{\eta_i}\,.\,dw_\varphi \qquad df_{\eta_i}=dw_\xi\,.\,dw_\varphi \qquad df_\varphi=dw_\xi\,.\,dw_\eta$$
$$=\frac{4}{c^2}\,\xi\eta_i\,\sqrt{\xi^2+\eta_i^2}\,d\eta_i\,d\varphi, \quad =\frac{4}{c^2}\,\xi\eta\,\sqrt{\xi^2+\eta_i^2}\,d\xi\,d\varphi, \quad =\frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta_i^2)\,d\xi\,d\eta_i$$

und endlich das Raumelement

21d) $$dv=dw_\xi\,.\,dw_\eta\,.\,dw_\varphi=\frac{8}{c^3}\,\xi\eta_i(\xi^2+\eta_i^2)\,d\xi\,d\eta_i\,d\varphi.$$

Um ein Beispiel zu machen, berechnen wir den Inhalt V und die Oberfläche F des von den Paraboloiden $\xi=\xi_0$ und $\eta_i=\eta_{i0}$ begrenzten Körpers. Wir erhalten

22) $$F=F_\xi+F_\eta=\frac{4}{c^2}\int_0^{\eta_{i0}}\int_0^{2\pi}\xi_0\,\eta_i\,\sqrt{\xi_0^2+\eta_i^2}\,d\eta_i\,d\varphi+\frac{4}{c^2}\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi}\xi\eta_{i0}\sqrt{\xi^2+\eta_{i0}^2}\,d\xi\,d\eta_i$$
$$=\frac{8\pi}{3c^2}\left[(\xi_0+\eta_{i0})\,\sqrt{\xi_0^2+\eta_{i0}^2}^{\,3}-(\xi_0^4+\eta_{i0}^4)\right],$$

22a) $$V=\frac{8}{c^3}\int_0^{\xi_0}\int_0^{\eta_{i0}}\int_0^{2\pi}\xi\eta_i(\xi^2+\eta_i^2,\,d\xi\,d\eta_i\,d\varphi=\frac{2\pi}{c^3}\,\xi_0^2\,\eta_{i0}^2\,(\xi_0^2+\eta_{i0}^2,).$$

Für die geometrische Deutung dieser Ausdrücke ist zu bemerken, daß (Fig. 9) $OA=BC=\xi_0^2:c$, $OB=AC=\eta_{i0}^2:c$, $AB=OP=OQ=(\xi_0^2+\eta_{i0}^2):c$, $OC=(\xi_0^2-\eta_{i0}^2):c$, $CP=CQ=(2\,\xi_0\eta_{i0}):c$ ist. Der in Rede stehende Körper ist auch in physikalischer Hinsicht bemerkenswert. Es werden z. B. Strahlen, welche von O ausgehen und die innere spiegelnde Oberfläche treffen, stets so zurückgeworfen, daß sie nach je zwei Reflexionen immer wieder den Punkt O passieren.

Der Ausdruck

23) $$\Delta u=\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta z^2}$$

nimmt nach Jacobi[1]) durch Einführung der Parameter ξ,η_i,φ dreier beliebigen orthogonalen Flächensysteme die Form an

23a) $$D\,.\,\Delta u=\frac{\delta}{\delta\xi}\left(\frac{D}{A}\frac{\delta u}{\delta\xi}\right)+\frac{\delta}{\delta\eta_i}\left(\frac{D}{B}\frac{\delta u}{\delta\eta}\right)+\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{D}{C}\frac{\delta u}{\delta\varphi}\right).$$

[1]) Mathematische Werke. Berlin, 1851. Bd. 2. S. 40.

Sind ξ, η, φ die Koordinaten des Umdrehungsparaboloides, so folgt

$$23b)\quad \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\,\Delta u = \frac{1}{\xi}\frac{\delta}{\delta\xi}\left(\xi\frac{\delta u}{\delta\xi}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\delta}{\delta\eta}\left(\eta\frac{\delta u}{\delta\eta}\right)+\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}.$$

Da die Integration dieser partiellen Differentialgleichung, gleichgültig ob Δu null ist oder die erste oder zweite Ableitung der Funktion u nach der Zeit t enthält, auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann, so sind alle Probleme aus der mathematischen Physik, welche die Lösung dieser Gleichung erfordern, für einen von Rotationsparaboloiden begrenzten Körper lösbar. Ist $\Delta u = 0$, hat man es also mit der Potentialgleichung zu thun, so sind die Funktionen von ξ und η, welche die Lösung vermitteln, nach einer Bemerkung des Herrn Mehler [1]) die Funktionen des Kreiscylinders. Ist aber Δu von Null verschieden und ist $\Delta u = \varkappa\frac{\delta u}{\delta t}$, wie solches z. B. bei der Untersuchung der Wärmebewegung in jenem Körper eintritt, oder $\Delta u = \varkappa\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}$, was z. B. bei der Fortpflanzung der Schwingungen in einem kompressibeln elastischen Medium vorkommt, so treten in der Lösung gewisse den Funktionen des parabolischen Cylinders zugeordnete Funktionen auf. Man sehe hierüber die erwähnte Abhandlung des Verfassers.

Wählen wir den gemeinsamen Brennpunkt der Paraboloide zum Transformationscentrum, so erhalten wir durch Inversion drei Systeme von orthogonalen Flächen mit den Parametern ξ_1, η_1, φ_1. Wir setzen Gleichung 11) entsprechend

$$24)\quad x_1 = \varkappa^2 c\frac{\xi_1^2-\eta_1^2}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^2},\quad y_1 = \varkappa^2 c\frac{2\xi_1\eta_1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^2}\cos\varphi_1,\quad z_1 = \varkappa^2 c\frac{2\xi_1\eta_1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^2}\sin\varphi_1.$$

und erhalten als Gleichungen der gesuchten Flächen

$$\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2-\frac{\varkappa^2 c}{2\xi_1^2}x_1\right)^2 = \left(\frac{\varkappa^2 c}{2\xi_1^2}\right)^2(x_1^2+y_1^2+z_1^2),$$

$$24a)\quad \left(x_1^2+y_1^2+z_1^2+\frac{\varkappa^2 c}{2\eta_1^2}x_1\right)^2 = \left(\frac{\varkappa^2 c}{2\eta_1^2}\right)^2(x_1^2+y_1^2+z_1^2),$$

$$y_1\sin\varphi_1 - z_1\cos\varphi_1 = 0.$$

Die beiden ersten Gleichungen stellen Flächen vor, welche durch Umdrehung von Kardioiden mit gemeinsamem Pol und gemeinsamer Achse um diese Achse entstehen, während die letzte die Gleichung der dazu gehörigen Meridianebenen ist. Diese Flächensysteme bestimmen die Lage eines Punktes im Raume eindeutig, wofern man z. B. nur positive Werte der Parameter ξ_1, η_1, φ_1 zuläßt. Weil für $\xi_1 = \infty$ die ξ_1-Fläche den Nullpunkt, für $\xi_1 = 0$ aber die negative x_1-Achse, die η_1-Fläche dagegen für $\eta_1 = \infty$ ebenfalls den Nullpunkt und für $\eta_1 = 0$ die positive x_1-Achse vorstellt, so wird man alle Punkte des Raumes erhalten, wenn ξ_1 von ∞ bis 0, η_1 von ∞ bis 0, φ_1 von 0^0 bis 360^0 variiert. Auch ist ersichtlich, daß ξ_1 und η_1 stets im Abnehmen begriffen sind, wenn man von einer den Pol näher umschließenden ξ_1- oder η_1-Fläche zu einer ihn weiter umgebenden übergeht.

Die Entfernung R_1 zweier Punkte P_1 und P_0 mit den kardioidischen Koordinaten ξ_1, η_1, φ_1 und ξ_0, η_0, φ_0 ergiebt sich aus der Gleichung

[1]) Programm des Gymnasiums zu Elbing. 1870. S. 2.

25) $$R_1^2 = \frac{\varkappa^4 c^2}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^2(\xi_0^2+\eta_0^2)^2}\, G,$$

$$G = \Big\{\big(\xi_1^2+\eta_1^2+\xi_0^2+\eta_0^2\big)^2 - \big(2\eta_1\eta_0 + 2\xi_1\xi_0\cos(\varphi_1-\varphi_0)\big)^2 - \big(2\xi_1\xi_0\sin(\varphi_1-\varphi_0)\big)^2\Big\}.$$

Für die Wegelemente auf den drei Flächen erhalten wir

26) $$dw_{\xi_1} = \frac{2\varkappa^2 c}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}^3}\, d\xi_1, \quad dw_{\eta_1} = \frac{2\varkappa^2 c}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}^3}\, d\eta_1, \quad dw_{\varphi_1} = \frac{2\varkappa^2 c\,\xi_1\eta_1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^2}\, d\varphi_1,$$

und daher ist das Linienelement

26a) $$dw_1^2 = \frac{4\varkappa^4 c^2}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^3}\left\{d\xi_1^2 + d\eta_1^2 + \frac{\xi_1^2\eta_1^2}{\xi_1^2+\eta_1^2}\, d\varphi_1^2\right\}.$$

Ferner sind die Flächenelemente in den drei Flächen

26b) $$df_{\xi_1} = \frac{4\varkappa^4 c^2\,\xi_1\eta_1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}^7}\, d\eta_1\, d\varphi_1, \quad df_{\eta_1} = \frac{4\varkappa^4 c^2\,\xi_1\eta_1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}^7}\, d\xi_1\, d\varphi_1,$$

$$df_{\varphi_1} = \frac{4\varkappa^4 c^2}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^3}\, d\xi_1\, d\eta_1,$$

und endlich das Raumelement

26c) $$dv_1 = \frac{8\varkappa^6 c^3\,\xi_1\eta_1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^5}\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\varphi_1.$$

Der Ausdruck Δu_1 nimmt die Form an

27) $$\frac{4\varkappa^4 c^2\,\xi_1\eta_1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^5}\,\Delta u_1$$

$$= \frac{\delta}{\delta\xi_1}\left(\frac{\xi_1\eta_1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^2}\,\frac{\delta u_1}{\delta\xi_1}\right) + \frac{\delta}{\delta\eta_1}\left(\frac{\xi_1\eta_1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^2}\,\frac{\delta u_1}{\delta\eta_1}\right) + \frac{1}{\xi_1\eta_1(\xi_1^2+\eta_1^2)}\,\frac{\delta^2 u_1}{\delta\varphi_1^2}.$$

Hier ist eine Trennung der Variabeln außer im Falle der Potentialgleichung nicht möglich. Ist $\Delta u = 0$, so kann man $u_1 = (\xi_1^2+\eta_1^2)\,u_2$ setzen und erhält für u_2 die Gleichung

27a) $$0 = \frac{1}{\xi_1}\frac{\delta}{\delta\xi_1}\left(\xi_1\frac{\delta u_2}{\delta\xi_1}\right) + \frac{1}{\eta_1}\frac{\delta}{\delta\eta_1}\left(\eta_1\frac{\delta u_2}{\delta\eta_1}\right) + \left(\frac{1}{\xi_1^2}+\frac{1}{\eta_1^2}\right)\frac{\delta^2 u_2}{\delta\varphi_1^2}.$$

Der durch Rotation der Kardioide um ihre Achse entstehende Körper läßt also nur bei Potentialaufgaben einfache, die Funktionen des Kreiscylinders erfordernde Lösungen zu.

§ 13.

Das Rotationsparaboloid zweiter Art.

Bei dem Rotationsparaboloid zweiter Art, welches durch Umdrehung einer Parabel um die Nebenachse d. h. die im Koordinatenanfang auf der Hauptachse errichtete Senkrechte entsteht, haben wir mehrere Fälle zu unterscheiden. Zunächst ist klar, daß bei der Rotation einer ganzen ξ- oder η-Parabel um diese Achse eine Fläche mit drei Abteilungen (Fig. 10) entsteht, von denen die mittlere, von der Hauptachse geschnittene die Kernfläche heißen möge. Ihre Fortsetzungen über die beiden in der Nebenachse liegenden Spitzen A und A_1 hinaus bilden die beiden andern symmetrisch zur Hauptachse gelegenen Abteilungen der Fläche Es entstehen daher bei der Umdrehung zweier Parabeln Zweideutigkeiten, welche zu beseitigen sind. Deshalb betrachten wir nur die in der einen von der Nebenachse begrenzten Halbebene liegenden Parabelbogen AB, A_1B_1, CDC_1. Dieselben schneiden sich in den Punkten P und P_1. Da nach den früheren Auseinandersetzungen für den Punkt P ξ positiv,

η_1 positiv und $\xi > \eta_1$, für den Punkt P_1 dagegen ξ positiv, η_1 negativ und ξ größer ist als der absolute Wert von η_1, so ist ersichtlich, daß die Lage eines Punktes dieser Halbebene eindeutig bestimmt wird, wenn $0 \leqq \xi \leqq \infty$, $-\infty \leqq \eta \leqq +\infty$ und stets $\xi \geqq [\eta]$ ist.

Drehen wir nun die Halbebene um die sie begrenzende Nebenachse, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der Parabelbogen CDC_1 eine Kernfläche d. h. ein Paraboloid mit einem Mantel, während die zusammengehörigen Parabelbogen AB und $A_1 B_1$ ein Paraboloid mit zwei Mänteln erzeugen. Jeder Punkt des Raumes wird demnach als Schnittpunkt einer Kernfläche, einer Fläche mit zwei Mänteln und einer Meridianebene bestimmt sein. Seine Koordinaten sind mithin

$$28) \qquad x = \frac{\xi^2 - \eta_1^2}{c} \cos\psi, \quad y = \frac{2\,\xi\,\eta_1}{c}, \quad z = \frac{\xi^2 - \eta_1^2}{c} \sin\psi,$$

wenn ψ den Winkel bedeutet, den die bewegliche mit der festen Meridianebene bildet. Offenbar ist $0^0 \leqq \psi \leqq 360^0$ und, wie erwähnt, $\xi \geqq [\eta]$. Wollte man $\xi \leqq [\eta]$ setzen, so würde dies andeuten, daß die zweite von der Nebenachse begrenzte Halbebene als feste Meridianebene angesehen werden soll.

Die Gleichungen der drei Flächen sind, wenn die Quadratwurzel positiv genommen wird,

$$28a) \quad y^2 = -4\frac{\xi^2}{c}\sqrt{x^2 + z^2} + 4\left(\frac{\xi^2}{c}\right)^2, \quad y^2 = 4\frac{\eta^2}{c}\sqrt{x^2 + z^2} + 4\left(\frac{\eta_1^2}{c}\right)^2, \quad x\sin\psi - z\cos\psi = 0.$$

Für die Entfernung zweier Punkte mit den Koordinaten ξ, η_1, ψ und ξ_0, η_{10}, ψ_0 erhalten wir

$$29) \quad R^2 = \frac{1}{c^2}\left\{(\xi^2 + \eta^2)^2 + (\xi_0^2 + \eta_{10}^2)^2 - 8\,\xi\,\eta_1\,\xi_0\,\eta_0 - 2\,(\xi^2 - \eta_1^2)\,(\xi_0^2 - \eta_0^2)\cos(\psi - \psi_0)\right\}.$$

Weiter sind die Wegelemente auf den drei Flächen

$$30) \; dw_\xi = \frac{2}{c}\sqrt{\xi^2 + \eta_1^2}\,.\,d\xi, \quad dw_\eta = \frac{2}{c}\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,.\,d\eta_1, \quad dw_\psi = \frac{\xi^2 - \eta_1^2}{c}\,d\psi,$$

und folglich das Quadrat des Linienelements

$$30a) \quad dw^2 = \frac{4}{c^2}\left\{\xi^2 + \eta^2)\,d\xi^2 + (\xi^2 + \eta_1^2)\,d\eta_1^2 + \frac{1}{4}(\xi^2 - \eta_1^2)^2\,d\psi^2\right\}.$$

Ferner sind die Flächenelemente der drei Flächen

$$30b) \; df_\xi = \frac{2}{c^2}(\xi^2 - \eta^2)\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,d\eta_1\,d\psi, \quad df_\eta = \frac{2}{c^2}(\xi^2 - \eta_1^2)\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,d\xi\,d\psi,$$

$$df_\psi = \frac{4}{c^2}(\xi^2 + \eta_1^2)\,d\xi\,d\eta_1,$$

und endlich das Raumelement

$$30c) \qquad dv = \frac{4}{c^3}(\xi^4 - \eta_1^4)\,d\xi\,d\eta_1\,d\psi.$$

Die Transformation des Ausdrucks Δu in die neuen Koordinaten liefert

$$31) \quad \frac{4}{c^2}(\xi^4 - \eta_1^4)\,\Delta u = \frac{\delta}{\delta\xi}\left((\xi^2 - \eta_1^2)\frac{\delta u}{\delta\xi}\right) + \frac{\delta}{\delta\eta}\left((\xi^2 - \eta^2)\frac{\delta u}{\delta\eta}\right) + 4\,\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}\,\frac{\delta^2 u}{\delta\psi^2}.$$

Aus der Form dieser Differentialgleichung ist zu erkennen, daß sich dieselbe allgemein nicht durch Trennung der Variabeln wird integrieren lassen. Versucht man dagegen, die Gleichung durch ein Produkt von drei Faktoren zu integrieren, nämlich einer Funktion von t, das ja in Δu vorkommen kann, einer Funktion von ψ und einer Funktion des zusammengesetzten Arguments $(\xi^2 - \eta^2)$ oder

$(2\xi\eta)$ oder $(\xi^2+\eta^2)$, so zeigt sich, daß die letzte dieser Funktionen die zugeordnete Funktion einer Kreiscylinderfunktion ist. Ein derartiges Integral läßt sich wenigstens bei gewissen Fragen verwerten.

Die Aufgabe der Inversion, welche auf Flächen führt, die durch Rotation der beiden durch die Nebenachse gebildeten Teile der Kardioide um diese Achse entstehen, muß hier übergangen werden.

§ 14.
Der parabolische Cylinder.

In diesem Abschnitt wird die Lage eines Punktes im Raume durch drei Koordinaten ξ, η, ζ bestimmt, welche als Parameter der drei orthogonalen Flächen

$$32)\qquad y^2 = -4\frac{\xi^2}{c}x + 4\left(\frac{\xi^2}{c}\right)^2,\quad y^2 = 4\frac{\eta^2}{c}x + 4\left(\frac{\eta^2}{c}\right)^2,\quad z=\zeta$$

angesehen werden können. Die Gleichungen $\xi=\xi_0$ und $\eta=\eta_0$ repräsentieren parabolische Cylinder (Fig. 11), während das Flächensystem $\zeta=\zeta_0$ aus den zur xy-Ebene parallelen Ebenen besteht. Die Bedingungen, welche ξ, η, ζ erfüllen müssen, sind $0 \leqq \xi \leqq \infty$, $-\infty \leqq \eta \leqq +\infty$, $-\infty \leqq \zeta \leqq +\infty$. Den Zusammenhang mit den Carteſischen Koordinaten zeigen die Formeln

$$32a)\qquad x = \frac{\xi^2-\eta^2}{c},\quad y = \frac{2\xi\eta}{c},\quad z=\zeta.$$

Demnach erhalten wir die Entfernung R zweier Punkte mit den Koordinaten ξ, η, φ und ξ_0, η_0, φ_0 aus der Gleichung

$$33)\qquad R^2 = \frac{1}{c^2}\left\{(\xi^2+\eta^2-\xi_0^2-\eta_0^2)^2 + (2\xi\eta_0 - 2\xi_0\eta)^2 + c^2(\zeta-\zeta_0)^2\right\}.$$

Die Wegelemente auf den drei Flächen sind

$$34)\qquad dw_\xi = \frac{2}{c}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,d\xi,\quad dw_\eta = \frac{2}{c}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,d\eta,\quad dw_\zeta = d\zeta;$$

folglich ist das Linienelement

$$34a)\qquad dw^2 = \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\,d\xi^2 + \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\,d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Für die Flächenelemente in den drei Flächen ergiebt sich

$$34b)\qquad df_\xi = \frac{2}{c}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,d\eta\,d\zeta,\quad df_\eta = \frac{2}{c}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,d\xi\,d\zeta,\quad df_\zeta = \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\,d\xi\,d\eta,$$

und für das Raumelement

$$34c)\qquad dv = \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Die Transformation des Ausdrucks Δu liefert die Differentialgleichung

$$35)\qquad \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\Delta u = \frac{\delta^2 u}{\delta\xi^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta\eta^2} + \frac{4}{c^2}(\xi^2+\eta^2)\frac{\delta^2 u}{\delta\zeta^2}.$$

Demnach sind für einen von parabolischen Cylindern begrenzten Körper nicht nur die Potentialaufgabe sondern auch diejenigen Aufgaben lösbar, in denen Δu eine Funktion der Zeit ist. Die Funktionen von ξ und η, auf welche die Lösung führt, bilden einen Grenzfall der Funktionen des elliptischen Cylinders und sind von mir an anderer Stelle[1]) ausführlicher behandelt worden; neuerdings hat auch Herr Haentzschel[2]) dieselben weiter untersucht.

[1]) Programm des Gymnasiums zu Cüstrin. 1883.

[2]) E. Haentzschel. Über die Differentialgleichung der Funktionen des parabolischen Cylinders. Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik 1888. Bd. 33. Heft 1.

Bilden wir das Syſtem der drei Flächen vom Nullpunkt aus durch reciproke Radien ab, ſo haben wir

$$36)\quad x_1 = \varkappa^2 c\,\frac{\xi_1^2 - \eta_1^2}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^2 + c^2\zeta_1^2},\quad y_1 = \varkappa^2 c\,\frac{2\xi_1\eta_1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^2+c^2\zeta_1^2},$$

$$z_1 = \varkappa^2 c^2\,\frac{\zeta_1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^2+c^2\zeta_1^2}$$

zu ſetzen und erhalten als Gleichungen der drei inverſen Flächen

$$36a)\quad \left(x_1^2+y_1^2+z_1^2-\frac{\varkappa^2 c}{2\xi_1^2}x_1\right)^2 = \left(\frac{\varkappa^2 c}{2\xi_1^2}\right)^2 (x_1^2+y_1^2),$$

$$\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2+\frac{\varkappa^2 c}{2\eta_1^2}x_1\right)^2 = \left(\frac{\varkappa^2 c}{2\eta_1^2}\right)^2 (x_1^2+y_1^2),\quad x_1^2+y_1^2+z_1^2 = \frac{\varkappa^2}{\zeta_1}\cdot z_1.$$

Die erſte dieſer Gleichungen ſtellt für konſtante Werte von ξ_1 ein Syſtem von in einander geſchachtelten wulſtförmigen Oberflächen vor, deren gemeinſchaftlicher Pol der Koordinatenanfang iſt, und deren in der x_1y_1-Ebene liegende Leitlinien aus in einander geſchachtelten Kardioiden beſtehen. Man kann ſich eine dieſer Flächen dadurch entſtanden denken, daß über den vom Rückkehrpunkte aus gezogenen Sehnen einer Kardioide Kreiſe errichtet werden, deren Ebenen ſenkrecht zur Ebene der Kardioide ſtehen und deren Durchmeſſer jene Sehnen ſind. Die Geſamtheit aller auf dieſe Weiſe konſtruierten Kreisperipherieen bildet den Kardioidenwulſt. Die innerſte ξ_1-Fläche, welche in einen Punkt, den Pol, zuſammenſchrumpft, hat den Parameter $\xi_1 = \infty$, während für $\xi_1 = 0$ die äußerſte ξ_1-Fläche alle Punkte umfaßt, welche entweder auf der negativen x_1-Achſe oder in unendlicher Ferne liegen.

Auch die zweite Gleichung repräſentiert eine Schar von wulſtförmigen Oberflächen, die mit den ξ_1-Flächen den Pol gemeinſam haben und deren Leitlinien Kardioiden ſind. Indeſſen liegen die Scheitel ſämtlicher η_1-Flächen auf der negativen, die der ξ_1-Flächen auf der poſitiven x_1-Achſe. Für $\eta_1 = \infty$ ſtellt die η_1-Fläche den Pol vor, und für $\eta_1 = 0$ umfaßt ſie alle Punkte, welche entweder in unendlicher Ferne oder auf der poſitiven x_1-Achſe liegen. Auch iſt klar, daß ξ_1 und η_1 ſtets abnehmen, wenn man von einer den Pol näher umſchließenden Fläche zu einer ihn weiter umgebenden übergeht.

Endlich ſtellt die dritte Gleichung ein Syſtem von Kugelflächen vor, welche die x_1y_1-Ebene ſämtlich im Koordinatenanfang berühren, deren Mittelpunkte alſo die Punkte der z_1-Achſe ſind. Die x_1y_1-Ebene ſelbſt wird erhalten, wenn der Parameter $\zeta_1 = 0$ iſt, während für $\zeta_1 = \pm\infty$ die Kugeln unendlich klein werden und als Punkte anzuſehen ſind, die mit dem Pol zuſammenfallen.

Hieraus ergiebt ſich mit Rückſicht auf die früher erwähnte Bedeutung negativer Werte von η_1, daß die Größen ξ_1, η_1, ζ_1 unter den Bedingungen $0 \leqq \xi_1 \leqq \infty$, $-\infty \leqq \eta_1 \leqq +\infty$, $-\infty \leqq \zeta_1 \leqq +\infty$ die eindeutige Beſtimmung eines Punktes P_1 im Raume ermöglichen.

In den neuen Koordinaten drückt ſich die Entfernung zweier Punkte $P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ und $P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ folgendermaßen aus:

$$37)\quad R_1^2 = \frac{\varkappa^4 c^2}{\rho_1\rho_0}\left\{(\xi_1^2+\eta_1^2-\xi_0^2-\eta_0^2)^2 + (2\xi_1\eta_0 - 2\xi_0\eta_1)^2 + c^2(\zeta_1-\zeta_0)^2\right\},$$

$$\rho_1 = (\xi_1^2+\eta_1^2)^2 + c^2\zeta_1^2,\quad \rho_0 = (\xi_0^2+\eta_0^2)^2 + c^2\zeta_0^2.$$

Die Wegelemente in den drei Flächen sind

38) $dw_{\xi_1} = \frac{2\varkappa^2 c}{\rho_1}\sqrt{\xi_1^2+\eta_{l1}^2}\,d\xi_1$, $dw_{\eta_1} = \frac{2\varkappa^2 c}{\rho_1}\sqrt{\xi_1^2+\eta_{l1}^2}\,d\eta_{l1}$, $dw_{\zeta_1} = \frac{\varkappa^2 c^2}{\rho_1}d\zeta_1$.

Also erhalten wir für das Quadrat des Linienelementes

38a) $dw^2 = \frac{4\varkappa^4 c^2}{\rho_1^2}\left\{(\xi_1^2+\eta_{l1}^2)\,d\xi_1^2+(\xi_1^2+\eta_{l1}^2)\,d\eta_{l1}^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2 d\zeta_1^2\right\}$,

für die Flächenelemente

38b) $df_{\xi_1} = \frac{2\varkappa^4 c^3}{\rho_1^2}\sqrt{\xi_1^2+\eta_{l1}^2}\,d\eta_{l1}\,d\zeta_1$, $df_{\eta_1} = \frac{2\varkappa^4 c^3}{\rho_1^2}\sqrt{\xi_1^2+\eta_{l1}^2}\,d\xi_1\,d\zeta_1$,

$$df_{\zeta_1} = \frac{4\varkappa^4 c^2}{\rho_1^2}(\xi_1^2+\eta_{l1}^2)\,d\xi_1\,d\eta_{l1}$$

und für das Raumelement

38c) $$dv = \frac{4\varkappa^6 c^4}{\rho_1^3}(\xi_1^2+\eta_{l1}^2)\,d\xi_1\,d\eta_{l1}\,d\zeta_1.$$

Berechnen wir z. B. die Oberfläche F und den Inhalt V eines Kardioidenwulstes, dessen Gleichung $\xi_1 = \xi_0$ ist, so erhalten wir

39) $$F = 2\varkappa^4 c^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\xi_0^2+\eta_{l1}^2}}{[(\xi_0^2+\eta_{l1}^2)^2+c^2\zeta_1^2]^{\frac{3}{2}}}\,d\eta_{l1}\,d\zeta_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{\varkappa^2 c}{\xi_0^2}\right)^2\pi = \frac{4}{3}\,d^2\pi,$$

39a) $$V = 4\varkappa^6 c^4\int_{\xi_0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_1^2+\eta_{l1}^2}{[(\xi_1^2+\eta_{l1}^2)^2+c^2\zeta_1^2]^3}\,d\xi_1\,d\eta_{l1}\,d\zeta_1 = \frac{5}{64}\left(\frac{\varkappa^2 c}{\xi_0^2}\right)^3\pi^2 = \frac{5}{64}\,d^3\pi^2.$$

Dabei bedeutet d dasjenige Stück der x_1-Achse, welches innerhalb des Körpers liegt, oder mit anderen Worten den Durchmesser der größten dem Körper einbeschriebenen Kugel.

Die Einführung der neuen Koordinaten in den Ausdruck Δu_1 liefert die Relation

40) $$\frac{4\varkappa^4 c^2(\xi_1^2+\eta_{l1}^2)}{\rho_1^3}\Delta u_1 = \frac{\delta}{\delta\xi_1}\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\delta u_1}{\delta\xi_1}\right)+\frac{\delta}{\delta\eta_{l1}}\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\delta u_1}{\delta\eta_{l1}}\right)+\frac{4}{c^2}(\xi_1^2+\eta_{l1}^2)\frac{\delta}{\delta\zeta_1}\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\delta u}{\delta\zeta_1}\right)$$

oder, wenn $u_1 = \sqrt{\rho_1}\cdot u_2$ gesetzt wird,

40a) $$\frac{4\varkappa^4 c^2(\xi_1^2+\eta_{l1}^2)}{\rho_1^2}\Delta u_2 = \frac{\delta^2 u_2}{\delta\xi_1^2}+\frac{\delta^2 u_2}{\delta\eta_{l1}^2}+\frac{4}{c^2}(\xi_1^2+\eta_{l1}^2)\frac{\delta^2 u_2}{\delta\zeta_1^2}.$$

Daraus ist zu erkennen, daß bei einem Kardioidenwulst nur die Potentialaufgabe auf die mehrfach angegebene Weise sich lösen läßt.

§ 15.

Der parabolische Kegel.

Bei dem Versuch, die paraboliſchen Koordinaten der Ebene auf die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r zu übertragen, stellt sich uns die Schwierigkeit entgegen, ein passendes sphärisches Analogon für die ebene Parabel zu finden. Nun kann die ebene Parabel als Grenzfall einer Ellipse und Hyperbel angesehen werden, wofern man entweder einen Scheitel oder einen Brennpunkt festhält und den Mittelpunkt oder den zweiten Brennpunkt oder den zweiten Scheitel ins Unendliche rücken läßt. Diese verschiedenen Fälle geben in der Ebene dasselbe Resultat, im Raume indessen, wo wir es mit den Durchschnitten eines Kegels zweiter Ordnung mit der Oberfläche einer Kugel, deren

Centrum die Spitze des Kegels ist, zu thun haben, kann eine solche Uebereinstimmung nicht stattfinden. Hier kann die „sphärische Parabel" und der „paraboloische Kegel" in verschiedener Weise definiert werden.

Im allgemeinen ist zu bemerken, daß, da es nur eine Art des Kegels zweiter Ordnung giebt, die elliptischen, hyperbolischen und paraboloischen Kegel nicht verschieden sein können. Will man dennoch die Schnittkurven eines Kegels zweiter Ordnung mit einer Kugel als sphärische Ellipse, sphärische Hyperbel und sphärische Parabel unterscheiden, so kann dies nur eine Verschiedenheit in der Betrachtungsweise oder einen bemerkenswerten Specialfall bedeuten.

Plücker[1]) bezeichnet als paraboloischen Kegel einen solchen, bei dem die „charakteristischen Schnitte" d. h. die Schnitte der zu den Fokallinien senkrechten Ebenen mit der Kegelfläche Parabeln sind. Wäre also die z-Achse (Fig. 12) die eine Fokallinie des Kegels, so müßte der nicht benachbarte Scheitel des auf der Kugel r erzeugten Kegelschnitts z. B. ein Punkt der x-Achse sein. Leider aber sind die beiden Kegel zweiter Ordnung, auf welche man so geführt wird, nicht orthogonal. Die Bedingung der Orthogonalität aber darf man nicht fallen lassen, wenn brauchbare Resultate erzielt werden sollen.

Daraus geht hervor, daß der Winkel der Fokallinien eine konstante Größe haben muß. Ist diese Größe willkürlich, so ergiebt sich die gewöhnliche Form der elliptischen Kugelkoordinaten[2]) Wäre aber jener Winkel 180°, ein Fall, der dem unendlich fernen Mittelpunkte der ebenen Ellipse entspricht, so würde man, ebenso wie in dem andern Falle, wo der Winkel 0° ist, die Polarkoordinaten des Raumes erhalten Es bleibt also nur übrig anzunehmen, daß der Winkel der Fokallinien 90° beträgt. Ist die z-Achse die eine Fokallinie, so fällt die andere in die x-Achse. Dies entspricht auch vollkommen den Entwickelungen des § 2, nach welchen die Excentricität der Ellipse im Grenzfalle einen unendlich großen Wert erlangt. Die so definierte sphärische Parabel ist übrigens der geometrische Ort für alle diejenigen Punkte P (Fig. 12) auf der Oberfläche einer Kugel, deren sphärische Entfernung von einem als Richtlinie gegebenen kleinen Kugelkreise D E gleich ist ihrer sphärischen Entfernung von einem gegebenen Punkte Z. Ist die Breite $Z\hat{O}D$ des Kugelkreises gleich ξ, $P\hat{O}X = \varphi$ und $Q\hat{O}Y = \vartheta$, so ergiebt sich aus dem sphärischen Dreieck PQZ

$$\sin(\varphi + \xi) = \sin\varphi \cdot \sin\vartheta,$$

oder, wenn man φ und ϑ mittels der Gleichungen

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\ z = r\sin\varphi\sin\vartheta$$

eliminiert,

$$41)\qquad x^2 + z^2 - y^2\operatorname{ctg}^2\xi - \frac{2xz}{\sin\xi} = 0.$$

[1]) J. Plücker. Analytisch-geometrische Entwicklungen Essen. 1828.

[2]) Die gewöhnliche Form der elliptischen Kugelkoordinaten geben die Gleichungen

$$x = \frac{\mu\nu}{bc}r,\ y = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}r,\ z = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}r.$$

Herr Hutt hat dieselben, indem er

$$\mu = a\sin\sigma,\ \nu = a\sin\delta,\ b = a\sin s,\ c = a$$

setzte, wesentlich vereinfacht. Vergl. E. Hutt. Eine neue Form der elliptischen Kugelkoordinaten. Programm der Friedrich-Werderschen Gewerbeschule zu Berlin. 1872.

Die paraboloischen Kugelkoordinaten lassen sich natürlich hieraus durch eine einfache Betrachtung ableiten.

Dies ist für konstante Werte von ξ die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung, dessen Fokallinien die x- und z-Achse sind und dessen Erzeugende in der xz Ebene mit jenen Achsen den Winkel $\frac{1}{2}\xi$ bilden. Für den sphärischen Kegelschnitt ist also $\frac{1}{2}\xi$ der Abstand des Scheitels S vom Brennpunkt Z, $90^0 + \xi$ die Länge der ganzen großen Achse und 90^0 die Excentricität.

Eine entsprechende Betrachtung liefert als Gleichung eines anderen parabolischen Kegels

41a) $$x^2 + z^2 - y^2 \operatorname{ctg}^2\eta + \frac{2xz}{\sin\eta} = 0.$$

Beide Gleichungen stellen mit der Kugelgleichung

41b) $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ein System von drei Flächenscharen vor, welche sich sämtlich unter rechten Winkeln schneiden. Lösen wir nämlich die Gleichungen 41) nach x, y, z, so erhalten wir

42) $$x = r \sin\tfrac{1}{2}(\xi - \eta),\ y = r\sqrt{\sin\xi \sin\eta},\ z = r\cos\tfrac{1}{2}(\xi + \eta),$$

und dann zeigt sich, daß

$$\frac{\delta x}{\delta\xi}\frac{\delta x}{\delta\eta} + \frac{\delta y}{\delta\xi}\frac{\delta y}{\delta\eta} + \frac{\delta z}{\delta\xi}\frac{\delta z}{\delta\eta} = 0$$

ist. Die beiden konfokalen Kegelscharen sind also orthogonal; daß sie auch von der Schar konzentrischer Kugeln unter rechten Winkeln geschnitten werden, ist selbstredend.

Nimmt r die Werte von 0 bis ∞ an, so stellen r, ξ η ein Koordinatensystem im Raume, bei konstantem r demnach ξ, η ein Koordinatensystem auf der Kugeloberfläche vor. Beschränken wir uns zunächst auf die auf der positiven Seite der xz-Ebene liegende Halbkugel, so ist klar, daß für $\xi = 0^0$ der sphärische Kegelschnitt den Quadranten ZX_1 (Fig. 13), für $\eta = 0^0$ der Kegelschnitt der andern Schar den Quadranten ZX darstellt; für $\xi = \eta$ werden die Punkte des Halbkreises ZYZ_1 erhalten. Für $\frac{1}{2}\xi = 45^0$ geht die Kurve in einen größten Kugelkreis über, der durch Y und die Mitte der Bogen ZX und Z_1X_1 geht; entsprechend wird die η-Kurve für $\frac{1}{2}\eta = 45^0$ ein größter Kugelkreis, der durch Y und die Mitte der Bogen ZX_1 und Z_1X geht. Den von 0^0 bis 45^0 zunehmenden Werten der Parameter $\frac{1}{2}\xi$ und $\frac{1}{2}\eta$ entsprechen demnach sphärische Kegelschnitte, die immer mehr wachsen; fahren $\frac{1}{2}\xi$ und $\frac{1}{2}\eta$ fort zuzunehmen, so werden die Kegelschnitte wieder kleiner, bis die ξ-Kurve für $\frac{1}{2}\xi = 90^0$ den Quadranten XZ_1, die η-Kurve für $\frac{1}{2}\eta = 90^0$ den Quadranten X_1Z, als Grenze erreicht.

Dieselben Verhältnisse finden auf der Halbkugel statt, welche auf der negativen Seite der xz-Ebene liegt. Stellen wir uns daher vor, daß für jene Halbkugel die in dem Ausdruck für y vorkommende Quadratwurzel positiv, für diese negativ genommen werde, so ist die Lage eines Punktes auf der Kugeloberfläche eindeutig durch seine Koordinaten ξ,η bestimmt, wofern die Parameter den Bedingungen $0^0 \leqq \frac{1}{2}\xi \leqq 90^0$, $0^0 \leqq \frac{1}{2}\eta \leqq 90^0$ oder, was dasselbe ist, den Bedingungen $0^0 \leqq \xi \leqq 180^0$, $0^0 \leqq \eta \leqq 180^0$ unterworfen sind. Die erste Form der Bedingungen giebt über die Lage des dem Punkte Z benachbarten Scheitels Aufschluß, die zweiten Bedingungen zeigen an, wie groß die sphärische von Z ausgerechnete Brennpunktsordinate ist. Dabei haben wir stillschweigend

vorausgesetzt, daß die Erzeugenden der sphärischen Kegelschnitte nur bis zur gemeinsamen Spitze der Kegel gerechnet werden.

Die neue Form der elliptischen Kugelkoordinaten entspricht, wie man sieht, vollständig den paraboliſchen Koordinaten der Ebene; sie gehen in diese über, wenn der Radius der Kugel ins Unendliche wächst.

Das Quadrat der Entfernung zweier Punkte mit den Koordinaten r, ξ, η und r_0, ξ_0, η_0 ist

43) $$R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cdot \cos\gamma,$$

$$\cos\gamma = \cos\frac{1}{2}(\xi - \xi_0)\cos\frac{1}{2}(\eta - \eta_0) - \sin\frac{1}{2}(\xi + \xi_0)\sin\frac{1}{2}(\eta + \eta_0) + \sqrt{\sin\xi \sin\xi_0 \sin\eta \sin\eta_0},$$

ein Ausdruck, der offenbar noch weiterer Transformation fähig ist.

Für die Wegelemente auf den drei Flächen erhalten wir

44) $$dw_r = dr, \quad dw_\xi = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\sin\xi + \sin\eta}{\sin\xi}}\,d\xi, \quad dw_\eta = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\sin\xi + \sin\eta}{\sin\eta}}\,d\eta;$$

folglich ist das Quadrat des Linienelements

44a) $$dw^2 = dr^2 + \frac{r^2}{4}\frac{\sin\xi + \sin\eta}{\sin\xi}\,d\xi^2 + \frac{r^2}{4}\frac{\sin\xi + \sin\eta}{\sin\eta}\,d\eta^2.$$

Weiter ergeben sich die drei Flächenelemente

$$df_r = \frac{r^2}{4}\frac{\sin\xi + \sin\eta}{\sqrt{\sin\xi \sin\eta}}\,d\xi\,d\eta,$$

44b) $$df_\xi = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\sin\xi + \sin\eta}{\sin\eta}}\,dr\,d\eta,$$

$$df_\eta = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\sin\xi + \sin\eta}{\sin\xi}}\,dr\,d\xi,$$

und das Raumelement

44c) $$dv = \frac{r^2}{4}\frac{\sin\xi + \sin\eta}{\sqrt{\sin\xi \sin\eta}}\,dr\,d\xi\,d\eta.$$

Demnach haben wir für den Umfang U des Kegelschnittes, welcher auf der Kugel $r = r_0$ durch den Kegel $\xi = \xi_0$ erzeugt wird, das Integral

45) $$U = 2r_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin\xi_0 + \sin\eta}{\sin\eta}}\,d\eta.$$

Dasselbe ist ein vollständiges elliptisches Integral dritter Gattung und läßt sich durch die Substitution

$$\sin\eta = \frac{\sin\xi_0 \sin^2\varphi}{\sin\xi_0 + \cos^2\varphi}, \quad k^2 = \frac{1 - \sin\xi_0}{1 + \sin\xi_0}, \quad a^2 = \frac{1}{1 - \sin\xi_0}$$

ohne Mühe auf die Legendre'sche Normalform bringen. Wir erhalten

$$45a)\quad U=\frac{4r_0\sin\xi_0}{\sqrt{1+\sin\xi_0}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-a^2k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{4r_0(1-a^2k^2)}{ak}\Pi\left(\frac{\pi}{2},k,a\right).$$

Wir bemerken, daß nach einer Formel von Jacobi[1]) jedes vollständige elliptische Integral dritter Art auf unvollständige Integrale erster und zweiter Gattung zurückgeführt werden kann; im vorliegenden Falle hat α, der Winkel des Parameters, der Gleichung $\sin\alpha = a$ entsprechend einen komplexen Wert. Um die Formel zu prüfen, setzen wir $\xi_0 = 0$; dann ist $U = r_0\pi$ die doppelte Länge des Quadranten ZX_1. Ist $\xi_0 = \frac{1}{2}\pi$, so ist der sphärische Kegelschnitt ein größter Kugelkreis, mithin $U = 2r_0\pi$. Daher gilt die Formel

$$45b)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sin\eta}{\sin\eta}}\,d\eta = \pi,$$

deren Richtigkeit auch durch direkte Auswertung des Integrals erkannt werden kann.

Der Flächeninhalt F desselben Kegelschnitts ergiebt sich aus der Formel

$$46)\qquad F=2\frac{r_0^2}{4}\int_0^{2\xi_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi+\sin\eta}{\sqrt{\sin\xi\sin\eta}}\,d\xi\,d\eta$$

$$=r_0^2\int_0^{2\xi_0}\sqrt{\sin\xi}\,d\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\eta}{\sqrt{\sin\eta}}+r_0^2\int_0^{2\xi_0}\frac{d\xi}{\sqrt{\sin\xi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin\eta}\,d\eta.$$

Führen wir die einzelnen Integrale, welche als die einfachsten elliptischen Integrale bezeichnet werden müssen und die z. B. auch bei der Berechnung von Lemniskatenbogen vorkommen, durch die Substitutionen

$$\sin\xi=\cos^2\varphi \text{ und } \sin\eta=\cos^2\psi,\ \varphi_0=\arccos\sqrt{\sin\xi_0},$$

auf die Normalform zurück, so erhalten wir mit Anwendung des durch die Gleichung

$$2F\left(\frac{\pi}{2}\right)E\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\pi$$

ausgedrückten Satzes von Legendre schließlich das Resultat

$$46a)\quad F=2r_0^2\pi-4r_0^2\left[F(\varphi_0)E\left(\frac{\pi}{2}\right)+F\left(\frac{\pi}{2}\right)E(\varphi_0)-F(\varphi_0)F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Dabei ist zu bemerken, daß das Quadrat des Moduls für sämtliche elliptischen Integrale gleich $\frac{1}{2}$ ist. Da $2r_0^2\pi$ die Oberfläche der Halbkugel ist, so stellt der Subtrahendus in 46a) den Inhalt der zonenförmigen Restfläche vor, welche man durch Ausschneiden des Kegelschnitts aus der Halbkugel erhält. Daher gelten die merkwürdigen Integralformeln

$$46b)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\xi+\sin\eta}{\sqrt{\sin\xi\sin\eta}}\,d\xi\,d\eta=2\pi,$$

[1]) C. G. J. Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Regiom. 1829. S. 139.

$$46c)\quad \int_{\xi_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\xi + \sin\eta}{\sqrt{\sin\xi\,\sin\eta}}\,d\xi\,d\eta = 4\left[F(\varphi_0)\,E\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right)E(\varphi_0) - F(\varphi_0)\,F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Von Interesse dürfte auch folgende Bemerkung sein. Da die Summe des Flächeninhaltes einer sphärischen geschlossenen Kurve und des Umfanges ihrer Polarkurve gleich 2π ist, so läßt sich das Doppelintegral für F in Gleichung 46), falls $r_0 = 1$ gesetzt wird, auf ein einfaches Integral zurückführen. — Übrigens werden die Formeln 46b) und 46c) auch erhalten, wenn man nach 44c) den Inhalt der Kugel und ihrer durch die Kegelmäntel gebildeten Teile berechnet.

Die Transformation des Ausdrucks Δu liefert die Differentialgleichung

$$47)\quad \frac{r^2}{4}(\sin\xi + \sin\eta)\,\Delta u = \frac{1}{4}(\sin\xi + \sin\eta)\frac{\delta}{\delta r}\left(r^2\frac{\delta u}{\delta r}\right) + \sqrt{\sin\xi}\,\frac{\delta}{\delta\xi}\left(\sqrt{\sin\xi}\,\frac{\delta u}{\delta\xi}\right) + \sqrt{\sin\eta}\,\frac{\delta}{\delta\eta}\left(\sqrt{\sin\eta}\,\frac{\delta u}{\delta\eta}\right)$$

oder, wofern gesetzt wird

$$\sin\xi = \cos^2 \operatorname{am}\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{cn}^2 x, \quad \sin\eta = \cos^2 \operatorname{am}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{cn}^2 y,$$

$$47a)\quad \frac{r^2}{2}(\operatorname{cn}^2 x + \operatorname{cn}^2 y)\,\Delta u = \frac{1}{2}(\operatorname{cn}^2 x + \operatorname{cn}^2 y)\frac{\delta}{\delta r}\left(r^2\frac{\delta u}{\delta r}\right) + \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}.$$

Hieraus ist zu erkennen, daß für die Kugel und die beiden Kegel zweiter Ordnung sowohl die Potentialaufgabe als auch die anderen Aufgaben, in denen Δu nicht null ist, nach der Methode der Trennung der Variabeln behandelt werden können. Die Funktionen von x und y bez. ξ und η, auf welche die Lösung führt, sind offenbar specielle Lamé'sche Funktionen.

Die inversen Flächenscharen der in diesem Abschnitt besprochenen drei orthogonalen Flächensysteme sind mit diesen selbst identisch, so lange der gemeinsame Scheitel der Kegel d. h. der Mittelpunkt der koncentrischen Kugeln als Inversionscentrum gewählt wird. Dieser Fall bietet also nichts Neues. Dagegen zeigen die Flächen, welche bei der Abbildung von einem Punkte der Kegelachse oder einer Fokallinie aus auftreten, bemerkenswerte Eigenschaften; indessen können wir hier nicht näher auf sie eingehen.

§ 16.

Das elliptische und das hyperbolische Paraboloid.

Wir wenden uns zuletzt zu den allgemeinen paraboloischen Koordinaten des Raumes. Während bei den centrischen Flächen zweiten Grades die Lage eines Raumpunktes durch den Schnitt eines dreiachsigen Ellipsoids, eines Hyperboloids mit einem Fache und eines solchen mit zwei Fächern bestimmt wird, handelt es sich hier um die allgemeinsten Flächen zweiten Grades ohne Mittelpunkt, welche orthogonal und konfokal sind. Die Flächen dieser Art sind das elliptische Paraboloid und das hyperbolische Paraboloid. Es zeigt sich, daß ein Punkt des Raumes sich als Schnittpunkt zweier elliptischen Paraboloide mit entgegengesetzt liegenden Scheiteln und eines hyperbolischen Paraboloids der Lage nach bestimmen läßt. — Die in der Einleitung aufgeführten Arbeiten der Herren Böklen, Caspary und Danitsch sind auf die Entwickelungen dieses Abschnitts ohne Einfluß gewesen; soweit es dem Verfasser bekannt, ist die hier gegebene Form der paraboloischen Koordinaten von anderer Seite noch nicht aufgestellt worden.

Die Gleichungen der konfokalen und orthogonalen Paraboloide, welche sich ohne Schwierigkeit aus den bekannten Gleichungen der konfokalen centrischen Flächen zweiter Ordnung durch den mehrfach erwähnten Grenzübergang ableiten lassen, sind

$$48)\qquad \begin{aligned} \frac{y^2}{\xi^2}+\frac{z^2}{\xi^2+a^2}&=\frac{-4cx+4\xi^2}{c^2},\\ \frac{y^2}{\eta^2}+\frac{z^2}{\eta^2-a^2}&=\frac{4cx+4\eta^2}{c^2},\\ \frac{y^2}{\zeta^2}-\frac{z^2}{a^2-\zeta^2}&=\frac{4cx+4\zeta^2}{c^2}. \end{aligned}$$

ξ, η, ζ sind die Parameter der drei Flächen, c die frühere, a eine neue willkürliche Konstante. Die erste Gleichung stellt für konstante Werte von ξ eine Schar von elliptischen Paraboloiden vor, wenn vorausgesetzt wird, daß ξ^2 nicht kleiner als 0 ist. Die Scheitel dieser Flächen liegen sämtlich auf der positiven x Achse (Fig. 14a) und im Abstande $\xi^2 : c$ vom Nullpunkte des Koordinatensystems x, y, z Auch die zweite Gleichung repräsentiert, so lange $\eta^2 \geqq a^2$, für gegebene Werte von η eine Schar von elliptischen Paraboloiden, deren Scheitel jedoch auf der negativen x-Achse im Abstande $\eta^2 : c$ vom Koordinatenanfang gelegen sind. Die dritte Gleichung endlich giebt bei konstantem ζ, falls $0 \leqq \zeta^2 \leqq a^2$ gedacht wird, ein System von hyperbolischen Paraboloiden (Fig. 14b), welche von der negativen x-Achse in einem Punkte, der vom Nullpunkte die Entfernung $\zeta^2 : c$ hat, durchsetzt werden.

Man stellt sich leicht die verschiedenen Formen vor, welche die drei Arten der Flächen der Reihe nach annehmen. Für einen unendlich großen Parameter ξ^2 liegt der Scheitel des elliptischen Paraboloids auf der positiven x Achse in unendlicher Ferne; auch die auf der y-Achse und z-Achse sowohl in positiver als negativer Richtung abgeschnittenen Strecken sind unendlich groß, so daß die gesamte Fläche im Unendlichen verläuft. Nimmt nun der Wert von ξ^2 ab, so nähert sich der Scheitel auf der positiven Hälfte der x Achse dem Koordinatenanfang, wir erhalten die gewöhnliche Form des elliptischen Paraboloids, das sich immer mehr gegen die xz-Ebene abflacht, bis es schließlich für $\xi^2 = 0$, also den kleinsten Wert, den ξ^2 annehmen kann, ganz und gar mit der xz-Ebene zusammenfällt, gleichwohl aber nicht alle Punkte dieser Ebene umfaßt, sondern nur diejenigen, welche innerhalb der durch die Gleichungen

$$48a)\qquad y = 0, \quad z^2 = -\frac{4\,a^2 x}{c}$$

bezeichneten Parabel liegen. Diese Parabel, deren Scheitel der Koordinatenanfang ist, muß man sich also aus zwei auf einander liegenden Blättern bestehend denken. Der übrige d. h. außerhalb derselben Parabel liegende Teil der xz-Ebene, der ebenfalls als Doppelebene zu denken ist, stellt einen Grenzfall der hyperbolische Paraboloide, nämlich denjenigen vor, in welchem der Parameter $\zeta^2 = 0$ ist. Wächst der Wert von ζ^2, so treten die beiden Blätter auseinander und es entsteht die gewöhnliche Form der hyperbolischen Paraboloide, deren Scheitel- oder besser Sattelpunkt mit wachsendem ζ^2 sich auf der negativen x-Achse vom Koordinatenanfang immer weiter entfernt. Die volle Entfaltung zeigt die Fläche für $\zeta^2 = a^2 : 2$, in welchem Falle ihre Gleichung die einfache Gestalt

$$48b)\qquad y^2 - z^2 = 2\frac{a^2}{c}x + \left(\frac{a^2}{c}\right)^2$$

annimmt, aus der wir erkennen, daß die mit der yz-Ebene parallelen Schnitte der Fläche sämtlich gleichseitige Hyperbeln sind. Bei weiterer Vergrößerung von ζ^2 flacht sich die Fläche nach der positiven Seite der x-Achse hin immer mehr ab; hier nähern sich die Flächenteile immer mehr der xy-Ebene, welche sie schließlich, wenn der Parameter ζ^2 seinen größten Wert a^2 erhält, auch erreichen. Aber die Fläche umfaßt in diesem Falle nur diejenigen Punkte der aus zwei Blättern bestehenden xy-Ebene, welche außerhalb der Parabel

$$48c) \qquad z = 0, \quad y^2 = 4\frac{a^2}{c}x + 4\left(\frac{a^2}{c}\right)^2,$$

deren Scheitel S von O um $a^2 : c$ entfernt ist, gelegen sind. Alle übrigen, also innerhalb dieser Parabel liegenden Punkte der xy-Doppelebene bilden die Grenzfläche der dritten Schar von Paraboloiden, die wiederum elliptische sind und in eben diesem Grenzfalle den Parameter $\eta^2 = a^2$ besitzen. Mit zunehmendem η^2 hebt sich die Fläche, ein gewöhnliches elliptisches Paraboloid, immer mehr von der Fläche der Grenzparabel nach beiden Seiten hin ab, während ihr Scheitel auf der negativen x-Achse liegt und von S immer größere Entfernung erlangt Schließlich rückt der Scheitel auf dem bezeichneten Wege ins Unendliche. Dann sind auch die auf der y- und z-Achse sowohl in positiver als negativer Richtung abgeschnittenen Strecken unendlich groß geworden und die Fläche, deren Parameter $\eta^2 = \infty$ ist, verläuft nun vollständig in der Unendlichkeit.

Der Uebergang von den elliptischen Paraboloiden mit dem Parameter ξ zu den hyperbolischen Paraboloiden vollzieht sich also durch Vermittelung der Parabel 48a); der Uebergang von den hyperbolischen Paraboloiden zu den elliptischen Paraboloiden mit dem Parameter η wird durch Vermittelung der Parabel 48c) gewonnen. Diese beiden Grenzflächen, deren Größe und Lage das dreifache System von Flächen kennzeichnet, können zweckmäßig als Fokalparabeln bezeichnet werden. Der Brennpunkt der einen ist der Scheitel der andern; außerdem stehen die Punkte der Strecke OS mit den Brenn-, Mittel- und Scheitelpunkten nicht nur der Hauptschnitte, sondern auch der zu den Koordinatenebenen parallelen Schnitte im engsten Zusammenhange. Für einige Aufgaben empfiehlt es sich sogar, den Anfangspunkt der Koordinaten x, y, z nach der Mitte M von OS zu verlegen.

Da ζ^2 sich zwischen O und a^2 bewegt, so können wir

$$48d) \qquad \zeta = a \cdot \cos\varphi$$

setzen; φ bedeutet dann die Hälfte des Winkels, den die Asymptotenebenen der hyperbolischen Paraboloide mit einander bilden. Somit erhalten wir durch Auflösung der Gleichungen 48) nach x, y, z

$$48e) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{c}(\xi^2 - \eta^2 + a^2\sin^2\varphi), \\ y &= \frac{2}{c}\xi\eta\cos\varphi, \\ z &= \frac{2}{c}\sqrt{(\xi^2 + a^2)(\eta^2 - a^2)}\cdot\sin\varphi. \end{aligned}$$

Diese Werte gehen, wie man bemerkt, für $a = 0$ in die früher bei dem Rotationsparaboloid erster Art zur Anwendung gekommenen über. Auch stellen die beiden ersten der Gleichungen 48) für $a = 0$ selbstverständlich die früher betrachteten Umdrehungsparaboloide vor, während die hyperbolischen Paraboloide der dritten Gleichung unter derselben Annahme in die Meridianebenen übergehen.

Nun können wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, die Werte der willkürlichen Konstanten a und c als gleich annehmen; ferner ist es oft zweckmäßig für die algebraischen Werte ξ und η transcendente Parameter einzuführen. Wir setzen

$$a = c, \quad \xi = c.\,\mathfrak{Sin}\,\vartheta, \quad \eta = c.\,\mathfrak{Cos}\,\omega, \quad \zeta = c.\cos\varphi.$$

Dadurch nehmen die Gleichungen der drei Flächenscharen die Form an

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{\mathfrak{Sin}^2\vartheta} + \frac{z^2}{\mathfrak{Cos}^2\vartheta} &= -4cx + 4c^2\,\mathfrak{Sin}^2\vartheta, \\ \frac{y^2}{\mathfrak{Cos}^2\omega} + \frac{z^2}{\mathfrak{Sin}^2\omega} &= 4cx + 4c^2\,\mathfrak{Cos}^2\omega, \\ \frac{y^2}{\cos^2\varphi} - \frac{z^2}{\sin^2\varphi} &= 4cx + 4c^2\cos^2\varphi, \end{aligned} \tag{49}$$

so daß wir erhalten

$$\begin{aligned} x &= c\,(\mathfrak{Cos}^2\vartheta - \mathfrak{Cos}^2\omega - \cos^2\varphi), \\ y &= 2c\,\mathfrak{Sin}\,\vartheta\,\mathfrak{Cos}\,\omega\cos\varphi, \\ z &= 2c\,\mathfrak{Cos}\,\vartheta\,\mathfrak{Sin}\,\omega\sin\varphi. \end{aligned} \tag{49a}$$

Hinsichtlich der Grenzen der Intervalle, in denen ξ, η, ζ bez. ϑ, ω, φ sich bewegen, ist zu bemerken, daß es für positive y und z, es mag x positiv oder negativ sein, vollständig hinreicht, dieselben an die Bedingungen $0 \leqq \xi \leqq \infty$, $c \leqq \eta \leqq \infty$, $0 \leqq \zeta \leqq c$, d. h. $0 \leqq \vartheta \leqq \infty$, $0 \leqq \omega \leqq \infty$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{1}{2}\pi$ zu knüpfen. Für negative Werte von y und z thut man am besten anzunehmen, es sei überhaupt $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, und die Vorzeichen von ζ und $\sqrt{c^2 - \zeta^2}$ den Gleichungen $\zeta = c\cos\varphi$ und $\sqrt{c^2 - \zeta^2} = c\sin\varphi$ entsprechend zu bestimmen. Alle übrigen Quadratwurzeln können stets mit positivem Vorzeichen genommen werden; negative Werte von ξ sind entbehrlich, negative Werte von η auszuschließen.

Für das Quadrat der Entfernung eines Punktes P mit den Koordinaten ϑ, ω, φ vom Koordinatenanfang erhalten wir

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2\left\{\mathfrak{Sin}^2\omega + (\mathfrak{Cos}\,\vartheta + \sin\varphi)^2\right\}\left\{\mathfrak{Sin}^2\omega + (\mathfrak{Cos}\,\vartheta - \sin\varphi)^2\right\}, \tag{50}$$

während der Ausdruck für den Abstand zweier beliebigen Punkte keine besonderen Vereinfachungen zu bieten scheint.

Bilden wir aus 49a) die Differentialquotienten von x, y, z nach ϑ, ω, φ, so läßt sich zunächst ohne Mühe zeigen, daß die drei Flächenscharen sich in der That unter rechten Winkeln schneiden. Für die Wegelemente in den drei Flächen ergiebt sich

$$\begin{aligned} dw_\vartheta &= 2c\sqrt{(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)\,(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)}\,d\vartheta, \\ dw_\omega &= 2c\sqrt{(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)\,(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)}\,d\omega, \\ dw_\varphi &= 2c\sqrt{(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)\,(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)}\,d\varphi, \end{aligned} \tag{51}$$

und folglich ist das Quadrat des Linienelements

$$\begin{aligned} dw^2 = 4c^2\big\{&(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)\,(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)\,d\vartheta^2 + (\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)\,(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)\,d\omega^2 \\ &+ (\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)\,(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)\,d\varphi^2\big\}. \end{aligned} \tag{51a}$$

Weiter sind die drei Flächenelemente

51b) $$df_\vartheta = 4c^2(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)\sqrt{(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)}\, d\omega d\varphi,$$
$$df_\omega = 4c^2(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)\sqrt{(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)}\, d\vartheta d\varphi,$$
$$df_\varphi = 4c^2(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)\sqrt{(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)}\, d\vartheta d\omega,$$

und endlich das Raumelement

51c) $$dv = 8c^3(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)\, d\vartheta d\omega d\varphi.$$

Der Differentialausdruck Δu nimmt durch Einführung der allgemeinen paraboloidischen Koordinaten ϑ, ω, φ folgende Form an:

52) $$4c^2(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)(\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)\,\Delta u$$
$$= (\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)\frac{\delta^2 u}{\delta\vartheta^2} + (\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)\frac{\delta^2 u}{\delta\omega^2} + (\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}.$$

Diese Differentialgleichung läßt eine Trennung der Variabeln in überraschender Einfachheit zu. Ist zunächst $\Delta u = 0$ und setzt man $u = \Theta . \Omega . \Phi$, wo Θ nur ϑ, Ω nur ω, Φ nur φ enthält, so ergiebt sich

52a) $$(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)\frac{1}{\Theta}\frac{\delta^2\Theta}{\delta\vartheta^2} + (\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)\frac{1}{\Omega}\frac{\delta^2\Omega}{\delta\omega^2} + (\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)\frac{1}{\Phi}\frac{\delta^2\Phi}{\delta\varphi^2} = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der für beliebige Werte der Konstanten g und h identischen Gleichung

$$(\mathfrak{Sin}^2\omega + \sin^2\varphi)(h\mathfrak{Sin}^2\vartheta + g) + (\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \cos^2\varphi)(-h\mathfrak{Cos}^2\omega + g) + (\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \mathfrak{Cos}^2\omega)(h\cos^2\varphi - g) = 0,$$

so erkennt man, daß 52a) durch die Annahme

52b) $$\frac{\delta^2\Theta}{\delta\vartheta^2} = (h\mathfrak{Sin}^2\vartheta + g)\Theta,$$
$$\frac{\delta^2\Omega}{\delta\omega^2} = (-h\mathfrak{Cos}^2\omega + g)\Omega,$$
$$\frac{\delta^2\Phi}{\delta\varphi^2} = (h\cos^2\varphi - g)\Phi$$

befriedigt wird. Die Lösung der Potentialaufgabe über das elliptische und hyperbolische Paraboloid erfordert demnach nur eine und dieselbe Funktion, nämlich die Funktion des elliptischen Cylinders.

Ist aber nicht $\Delta u = 0$, sondern u eine Funktion der Zeit t, so kann man $u = T . u_1$ setzen, wo T nur t, u_1 aber kein t enthält. Eine entsprechende Betrachtung der Gleichung, welcher u_1 zu genügen hat, zeigt dann, daß, falls $u_1 = \Theta_1 . \Omega_1 . \Phi_1$ gesetzt wird, die Gleichungen

53b) $$\frac{\delta^2\Theta_1}{\delta\vartheta^2} = (-k\mathfrak{Sin}^4\vartheta + h\mathfrak{Sin}^2\vartheta + g)\Theta_1,$$
$$\frac{\delta^2\Omega_1}{\delta\omega^2} = (-k\mathfrak{Cos}^4\omega - h\mathfrak{Cos}^2\omega + g)\Omega_1,$$
$$\frac{\delta^2\Phi_1}{\delta\varphi^2} = (k\cos^4\varphi + h\cos^2\varphi - g)\Phi_1$$

erfüllt werden müssen, in denen k eine Konstante bedeutet. Wir bemerken, daß auch die allgemeineren Aufgaben zur Lösung nur eine Funktion erfordern, welche als Erweiterung der Funktion des elliptischen Cylinders zu bezeichnen ist. Diese Funktion ist wohl überhaupt noch nicht untersucht worden.

Zur Inversion der drei Flächenscharen vom Koordinatenursprung aus haben wir zu setzen

$$54)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{x^2}{c}\,\frac{\mathfrak{Cof}^2\vartheta_1 - \mathfrak{Cof}^2\omega_1 - \cos^2\varphi_1}{N_1},\\ y_1 &= \frac{x^2}{c}\,\frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\vartheta_1\,\mathfrak{Cof}\,\omega_1\cos\varphi_1}{N_1},\\ z_1 &= \frac{x^2}{c}\,\frac{2\,\mathfrak{Cof}\,\vartheta_1\,\mathfrak{Sin}\,\omega_1\sin\varphi_1}{N_1}, \end{aligned}$$

$$N_1 = \left\{\mathfrak{Sin}^2\omega_1 + (\mathfrak{Cof}\,\vartheta_1 + \sin\varphi_1)^2\right\}\left\{\mathfrak{Sin}^2\omega_1 + (\mathfrak{Cof}\,\vartheta_1 - \sin\varphi_1)^2\right\}.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen der inversen Flächensysteme

$$54a)\qquad \begin{aligned} \left(x_1^2+y_1^2+z_1^2 - \frac{x^2}{2c\,\mathfrak{Sin}^2\vartheta_1}x_1\right)^2 &= \left(\frac{x^2}{2c\,\mathfrak{Sin}\,\vartheta_1}\right)^2\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{\mathfrak{Sin}^2\vartheta_1} + \frac{z_1^2}{\mathfrak{Cof}^2\vartheta_1}\right),\\ \left(x_1^2+y_1^2+z_1^2 + \frac{x^2}{2c\,\mathfrak{Cof}^2\omega_1}x_1\right)^2 &= \left(\frac{x^2}{2c\,\mathfrak{Cof}\,\omega_1}\right)^2\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{\mathfrak{Cof}^2\omega_1} + \frac{z_1^2}{\mathfrak{Sin}^2\omega_1}\right),\\ \left(x_1^2+y_1^2+z_1^2 + \frac{x^2}{2c\cos^2\varphi_1}x_1\right)^2 &= \left(\frac{x^2}{2c\cos\varphi_1}\right)^2\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{\cos^2\varphi_1} - \frac{z_1^2}{\sin^2\varphi_1}\right). \end{aligned}$$

Über die gestaltlichen Verhältnisse dieser Flächen wird man sich leicht Aufklärung verschaffen, indem man deren Hauptschnitte sowie die Parallelschnitte zu den Koordinatenebenen aufsucht oder den Parametern ϑ_1, ω_1, φ_1, deren Grenzen übrigens dieselben bleiben wie früher, besondere Werte beilegt. Hervorheben wollen wir nur, daß die Flächen bis auf einen einzigen Fall den Vorzug haben, allseitig geschlossen zu sein, daß die in der x_1y_1-Ebene liegenden Hauptschnitte sämtlich Kardioiden sind, und endlich, daß an Stelle der Fokalparabeln der Paraboloide als Grenzflächen eine in der x_1y_1-Ebene liegende Kardioide und eine in der x_1z_1-Ebene liegende Cissoide getreten sind.

Es bedarf schließlich kaum der Erwähnung, daß die drei Flächenscharen orthogonal sind und die sie betreffende Potentialaufgabe mit Hülfe eines Produkts von drei Funktionen des elliptischen Cylinders mit verschiedenen Argumenten gelöst wird.

Auch wenn M, der Mittelpunkt der Fokalachse, als Inversionscentrum gewählt wird, liefert die Abbildung Flächensysteme mit bemerkenswerten Eigenschaften. Indessen muß die weitere Behandlung beider Flächengebilde einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Dr. Baer.

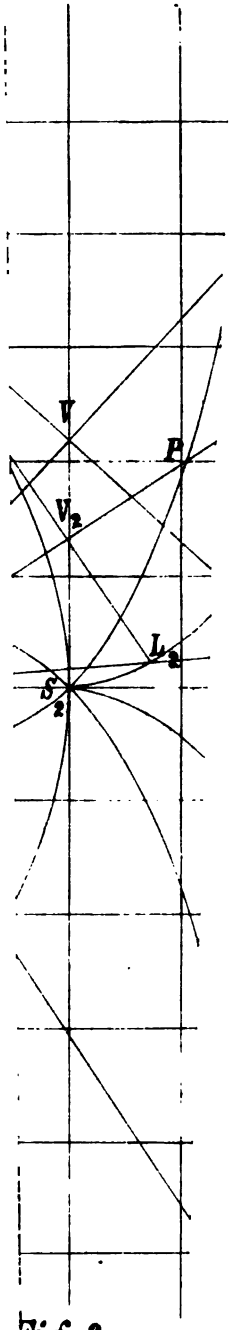
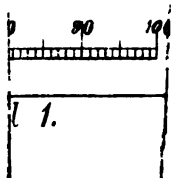


Fig. 8.



l 1.

S
Fi
F
2.

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

5 1966 ILL

944 -143

Math 8558.88
Parabolische koordinaten in der ebe
Cabot Science
003354635
3 2044 091 921 890